

УДК 521.15 : 521.61

**Ю. В. Баркин
А. А. Панкратов****О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ (1)**

Методом малого параметра Пуанкаре для гамильтоновых систем исследуется существование периодических решений в задаче о вращательном движении осесимметричного спутника относительно центра масс на круговой орбите. Движение спутника описывается каноническими оскулирующими элементами Андуайе. Получены аналитические условия существования периодических решений Шварцшильда и Пуанкаре, проведено их качественное и численное исследование.

В связи с развитием космической техники и появлением новых данных о движении некоторых естественных небесных тел в современных исследованиях получила развитие теория резонансных вращательных движений твердых тел. Многочисленные работы, начиная с В. В. Белецкого [1], посвящены исследованию вращательного движения спутника в плоскости орбиты. Ф. Л. Черноусько [2], V. A. Zlatoustov и A. P. Markeev [3], N. X. Vinh [4] провели цикл исследований резонансных вращений трехосных твердых спутников в плоскости эллиптической орбиты.

Важное направление в исследовании резонансных вращательных движений твердых тел было предложено М. С. Волковым [5, 6]. В его работах дается строгий вывод уравнений вращательного движения в оскулирующих канонических элементах Андуайе, описывающих уже пространственные движения осесимметричного тела, и предложен новый метод исследования резонансных вращений, основанный на теории периодических решений Пуанкаре [7].

В работах А. П. Торжевского [8, 9] рассматриваются пространственные резонансные движения быстро закрученного спутника на эллиптической орбите в ньютоновском поле Земли и предлагается метод исследования, основанный на введении переменных «действие — угол» при изучении резонансов разных типов, исследуются качественные характеристики, поведение на торе. Предложенный А. П. Торжевским метод открывает новые возможности в изучении резонансных вращательных движений небесных тел.

В настоящей работе методом малого параметра Пуанкаре исследуется существование периодических решений Шварцшильда и Пуанкаре в задаче о вращательном движении осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационных моментов центрального тела. Дается вывод аналитических условий существования периодических решений, проводится качественный и численный анализ возможных периодических движений.

§ 1. Постановка задачи. Уравнения движения в канонических оскулирующих элементах Андуайе

Рассмотрим вращательное движение осесимметричного твердого спутника относительно собственного центра масс под действием гравитационных моментов центрального тела O , относительно которого центр инерции спутника S описывает кеплеровскую круговую орбиту радиуса R .

Обозначим через m массу центрального тела, $A=B \neq C$ — главные центральные моменты инерции спутника и опишем его вращательное движение каноническими элементами Андуайе [10]:

$$L, G, H, l, g, h. \quad (1)$$

Для этого введем системы координат: $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом в центре притяжения O и осями Ox, Oy постоянной ориентации, лежащими в неподвижной плоскости круговой орбиты спутника; $Sxyz$ — система координат с началом в центре масс спутника S , оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Oxyz$; $S\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника.

Пусть P есть промежуточная плоскость, нормальная к вектору $\mathbf{G}$ кинетического момента вращательного движения спутника, проходящая через начало координат S . Ориентацию этой плоскости в осях $Sxyz$ определим углами ρ и h (рис. 1), где ρ — угол между осью Sz и вектором кинетического момента вращательного движения $\mathbf{G}$; h — угол между осью Sx и линией пересечения плоскостей P и Sxy .

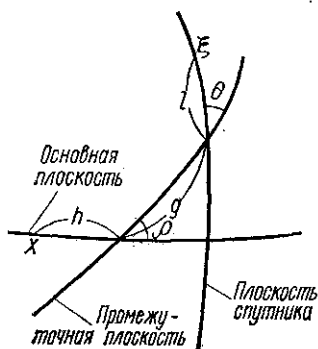


Рис. 1. Элементы Андуайе

Углами θ, l, g определим положение осей $S\xi\eta\zeta$ относительно вектора $\mathbf{G}$ и промежуточной плоскости P : θ — угол, измеряемый между осью $S\xi$ и вектором $\mathbf{G}$; l — угол, отсчитываемый от линии пересечения плоскостей P и $S\xi\eta\zeta$ до оси $S\xi$; g — угол, измеряемый от линии пересечения плоскостей Sxy и P до линии пересечения плоскостей $S\xi\eta\zeta$ и P .

Переменные L, H введем соотношениями $L = G \cos \theta$, $H = G \cos \rho$, где G — величина вектора $\mathbf{G}$. Таким образом, L есть проекция вектора $\mathbf{G}$ на ось динамической симметрии спутника $S\xi$, а H — проекция вектора $\mathbf{G}$ на ось Sz .

Движение центра масс спутника в осях $Oxyz$ опишем декартовыми координатами x, y, z , которые в случае рассматриваемого движения определяются формулами

$$x = R \cos M, \quad y = R \sin M, \quad z = 0, \quad (2)$$

где $M = nt$ — средняя аномалия, отсчитываемая в плоскости орбиты от оси Ox до радиус-вектора центра масс спутника, n — среднее орбитальное движение.

Выберем за невозмущенное движение свободное вращательное движение осесимметричного твердого тела с главными центральными моментами инерции $A=B \neq C$ и опишем движение спутника под действием гравитационных моментов уравнениями возмущенного движения в

оскулирующих канонических элементах Андуайе (1). Уравнения движения запишутся в виде [10, 11]:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H},\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$F = -\frac{G^2}{2A_1} - \frac{A-C}{2AC} L^2 + U, \quad (4)$$

U — силовая функция ньютоновского взаимодействия спутника с центральным телом. В настоящей работе мы ограничимся приближенным значением функции U :

$$U = k \gamma^2, \quad (5)$$

где

$$k = \frac{3fm}{2R^3} (A - C),$$

f — гравитационная постоянная, γ — косинус угла между линией центров OS и осью динамической симметрии спутника $S\xi$ представляется функцией элементов Андуайе следующими формулами:

$$\gamma = a_{13} \frac{x}{R} + a_{23} \frac{y}{R} + a_{33} \frac{z}{R}, \quad (6)$$

$$a_{13} = (\cos g \sin \theta \cos \rho + \sin \rho \cos \theta) \sin h + \cos h \sin g \sin \theta,$$

$$a_{23} = -(\cos g \sin \theta \cos \rho + \sin \rho \cos \theta) \cos h + \sin h \sin g \sin \theta, \quad (7)$$

$$a_{33} = -\sin \rho \sin \theta \cos g + \cos \theta \cos \rho,$$

$$\cos \theta = \frac{L}{G}, \quad \cos \rho = \frac{H}{G}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{G^2 - L^2}}{G}, \quad \sin \rho = \frac{\sqrt{G^2 - H^2}}{G}. \quad (8)$$

Формулы (6), (7), (8) позволяют представить F явной функцией элементов Андуайе (1) и времени. Опуская выкладки, приведем окончательное тригонометрическое представление силовой функции

$$U = k \sum_{k_1, k_2} u_{k_1, k_2}(\theta, \rho) \cos(k_1 g + k_2 \sigma), \quad (9)$$

где $\sigma = h - M$, суммирование производится по индексам $k_1 = 0, 1, 2$; $k_2 = 0, \pm 2$, а коэффициенты разложения (9) определяются формулами:

$$u_{0,0} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \rho,$$

$$u_{1,0} = \frac{1}{4} \sin 2\rho \sin 2\theta,$$

$$u_{2,0} = -\frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 \rho, \quad (10)$$

$$u_{0,2} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \rho,$$

$$u_{2,\pm 2} = -\frac{1}{8} \sin^2 \theta (1 \pm \cos \rho)^2,$$

$$u_{1,\pm 2} = \mp \frac{1}{4} \sin 2\theta \sin \rho (1 \pm \cos \rho)^2.$$

Из (4)–(10) следует, что F не зависит от элемента l , вследствие чего уравнения (3) допускают первый интеграл $L = L_0 = \text{const}$, который характеризует постоянство проекции вектора $\mathbf{G}$ на ось динамической симметрии спутника.

Исключая из дальнейшего рассмотрения вращение спутника относительно этой оси, понизим порядок уравнений на две единицы. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$F = -\frac{G^2}{2A} + U(H, G, g, h - M). \quad (12)$$

После интегрирования уравнений (11) переменные L, l определяются по следующим формулам:

$$L = L_0, \quad l - l_0 = \frac{L_0(A - C)}{A \cdot C} (t - t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial L} dt, \quad (13)$$

где L_0, l_0 — значения соответствующих переменных на момент времени $t = t_0$.

Приведем систему уравнений (11) к автономному виду, для чего введем новые канонические переменные $H' = H, h' = h - M$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial G}, \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial H'}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Phi = -\frac{G^2}{2A} + nH' + U(H', G, g, h'). \quad (15)$$

Уравнения (14) допускают первый интеграл (интеграл Якоби)

$$\Phi = c = \text{const}. \quad (16)$$

Сделаем предположение, что эллипсоид инерции спутника близок к сфере, а расстояние до спутника велико по сравнению с его размерами. Тогда характеристическую функцию задачи Φ можно представить в виде, необходимом для применения метода малого параметра Пуанкаре:

$$\Phi = \Phi_0 + \nu \Phi_1, \quad (17)$$

где

$$\Phi_0 = -\frac{G^2}{2A} + nH', \quad (18)$$

$$\nu \Phi_1 = U(H', G, g, h'). \quad (19)$$

В качестве малого параметра ν можно взять, например, динамическое сжатие спутника $\nu = \frac{A-C}{A}$.

При $\nu=0$ благодаря свойствам невозмущенного движения уравнения (14) допускают периодические решения. Нашей задачей является исследование вопроса о существовании периодических решений Пуанкаре—Шварцшильда при малых значениях параметра ν .

§ 2. Периодические решения Шварцшильда

Для краткости вывода аналитических условий существования периодических решений, для переменных Андуайе введем новые обозначения:

$$x_1 = G, \quad x_2 = H', \quad y_1 = g, \quad y_2 = h'.$$

Тогда уравнения (14) запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

где

$$\Phi = \Phi_0 + \nu \Phi_1,$$

$$\Phi_0 = -\frac{x_1^2}{2A} + nx_2,$$

$$\nu \Phi_1 = k \sum_{k_1 k_2} u_{k_1 k_2}(x_1, x_2) \cos(k_1 y_1 + k_2 y_2).$$

При $\nu=0$ из (20) получаем порождающую систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} = n_i^{(0)} \quad (i = 1, 2),$$

общее решение которой имеет вид

$$x_i^{(0)} = a_i, \quad y_i^{(0)} = n_i^{(0)} t + \omega_i \quad (i = 1, 2), \quad (21)$$

где a_i и ω_i являются произвольными постоянными интегрирования,

$$n_1^{(0)} = -\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} \right|_{x_i=a_i} = -\frac{a_1}{A}, \quad (21')$$

$$n_2^{(0)} = -\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2} \right|_{x_i=a_i} = -n.$$

Это решение будет периодическим с периодом T_0 , если будут выполняться условия

$$x_i(T_0) - x_i(0) = 0, \quad y_i(T_0) - y_i(0) = n_i^{(0)} \cdot T_0 = 2\bar{k}_i \pi, \quad (22)$$

где $\bar{k}_i$ ($i = 1, 2$) целые числа, такие, что $n_i^{(0)}$ соизмеримы.

Рассмотрим теперь решение уравнений (20) с новыми начальными условиями $x_i = a_i + \beta_i$, $y_i = \omega_i + \gamma_i$. Будем искать в окрестности порождающего решения периодическое решение с периодом $T_0(1+\alpha)$, где α величина порядка ν .

Для исследования существования такого решения преобразуем уравнения (20) к новой независимой переменной $\xi = \frac{t}{1+\alpha}$, для которой период искомого решения будет T_0 . Тогда уравнения движения (20) запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{d\xi} = (1+\alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{d\xi} = -(1+\alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (23)$$

Общее решение этих уравнений, близкое к порождающему, представим в форме

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i + \beta_i + \xi_i(\xi), \\ y_i &= \omega_i + \gamma_i + n_i^{(0)} \xi + \eta_i(\xi) \end{aligned} \quad (i = 1, 2). \quad (24)$$

Рассматривая формулы (24) как формулы преобразования к новым переменным ξ_i, η_i , запишем уравнения движения в следующем виде:

$$\frac{d\xi_i}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{d\xi} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} K &= \xi_1 n_1^{(0)} + \xi_2 n_2^{(0)} + \alpha \Phi(\xi, \alpha_i + \beta_i, n_i^{(0)} \xi + \omega_i + \gamma_i) + \\ &+ (1+\alpha) \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} \xi_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} \eta_i \right] + \\ &+ \frac{(1+\alpha)}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\xi_i \xi_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \omega_j} + \eta_i \eta_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right] + O(\xi^3). \end{aligned} \quad (26)$$

Необходимыми и достаточными условиями существования периодических решений системы (25) будут

$$\begin{aligned} x_i(T) - x_i(0) &= \xi_i(T_0) = 0, \\ y_i(T) - y_i(0) - 2\bar{k}_i \pi &= \eta_i(T_0) = 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (27)$$

Ограничиваясь в нашем решении только членами первого порядка малости относительно ξ_i, η_i , будем иметь

$$\frac{d\xi_i}{d\xi} = (1+\alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i}, \quad \frac{d\eta_i}{d\xi} = -n_i^{(0)} - (1+\alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}. \quad (28)$$

Разлагая $\Phi(\alpha_i + \beta_i, n_i^{(0)} \xi + \omega_i + \gamma_i)$ в степенной ряд по $\beta_i, \gamma_i, v, \alpha$, из уравнений (27) и (28) находим

$$\begin{aligned} \frac{\xi_k(T_0, \beta_i, \gamma_i, v)}{vT_0} &= \frac{\partial [\Phi_1]}{\partial \omega_k} + \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_k \partial \alpha_j} \beta_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_k \partial \omega_j} \gamma_j \right\} + \\ &+ v(\dots) = 0, \quad (k = 1, 2); \\ \frac{\eta_i(T_0, \beta_i, \gamma_i, v)}{-T_0} &= \alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha_1} + \beta_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + v(\dots) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\eta_2(T_0, \beta_i, \gamma_i, v)}{-T_0} = \alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_2} + \beta_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial a_2 \partial a_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial a_2^2} + v(\dots) = 0,$$

где

$$[\Phi_1] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_1(\rho, a_i, n_i^{(0)} \rho + \omega_i) d\rho. \quad (30)$$

Уравнения (20) допускают первый интеграл

$$\Phi = -\frac{x_1^2}{2A} + nx_2 + v\Phi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

частная производная которого по x_1 в порождающем решении отлична от нуля,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{x_1}{A} \Big|_{x_i=a_i} = -n_1^{(0)} \neq 0.$$

Следовательно, одно из уравнений (29) является следствием трех остальных. Мы полагаем $\xi_1=0$. Теперь достаточно удовлетворить трем уравнениям

$$\xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0. \quad (31)$$

Таким образом, для определения $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha$ имеем три уравнения. Следовательно, две неизвестные, например γ_1 и β_2 , можно выбрать произвольно. Пусть $\gamma_1 = \beta_2 = 0$ и выберем начальный момент времени таким образом, чтобы $\omega_1 = 0$. Тогда уравнения (31) будут давать $\beta_1(v), \gamma_2(v), \alpha(v)$ как голоморфные функции параметра v , обращающиеся в нуль вместе с v , если будут выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial [\Phi_1]}{\partial \omega_2} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial (\xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial (\gamma_2, \beta_1, \alpha)} \neq 0. \quad (33)$$

Последнее условие, как нетрудно показать, эквивалентно другому:

$$\frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_2^2} \neq 0. \quad (34)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям переменных, условия существования (32) и (34) запишем в явном виде. Для показателей соизмеримости $\bar{k}_1 : \bar{k}_2 = 1 : 1$ будем иметь

$$u_{2,2} \sin 2h'_0 = 0, \quad (32')$$

$$u_{2,2} \cos 2h'_0 \neq 0. \quad (34')$$

Откуда получаем $h'_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi; \theta \neq 0, \pi; \rho \neq \pi$. Аналогично для соизмеримости $\bar{k}_1 : \bar{k}_2 = 1 : -1$ получаем $h'_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi; \theta \neq 0, \pi; \rho \neq 0$ и для соизмеримостей $\bar{k}_1 : \bar{k}_2 = 1 : \pm 2$ $h'_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi; \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi; \rho \neq 0, \pi$. Для других показателей соизмеримости условие существования заведомо не выполняется.

§ 3. Периодические решения Пуанкаре

В этом случае $\alpha=0$ и условия существования периодических решений принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\xi_2(T_0, \beta_i, \gamma_i, \nu)}{\nu T_0} &= \frac{\partial [\Phi_1]}{\partial \omega_2} + \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_2 \partial a_j} \beta_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_2 \partial \omega_j} \gamma_j \right\} + \\ &+ \nu(\dots) = 0, \\ \frac{\eta_1(T_0, \beta_i, \gamma_i, \nu)}{-T_0} &= \beta_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial a_1^2} + \nu(\dots) = 0, \\ \frac{\eta_2(T_0, \beta_i, \gamma_i, \nu)}{-\nu T_0} &= \frac{\partial [\Phi_1]}{\partial a_2} + \beta_1 \left(\frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial a_2 \partial a_1} - \frac{1}{T_0} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial a_1^2} \int_0^{T_0} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial a_2 \partial \omega_1} t dt \right) + \\ &+ \beta_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_2^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial a_2 \partial \omega_2} + \nu(\dots) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

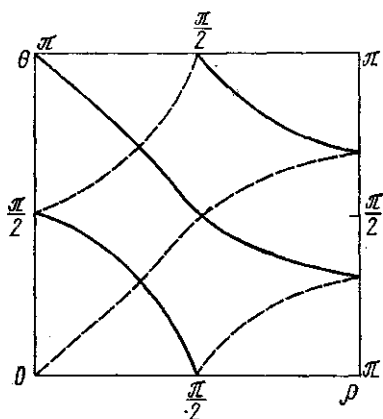


Рис. 2. Порождающие значения θ, ρ в случае соизмеримости $\bar{k}_1=1, \bar{k}_2=2$, $\varepsilon=-1$ — прямая, $\varepsilon=1$ — пунктир

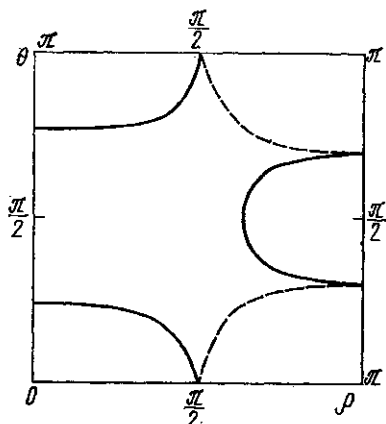


Рис. 3. Порождающие значения θ, ρ в случае соизмеримости $\bar{k}_1=\bar{k}_2=1$. Обозначения те же, что на рис. 2

Величины $\beta_1, \beta_2, \gamma_2$ определяются из системы (35) как голоморфные функции параметра ν , обращающиеся в нуль вместе с ν , если будут выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial [\Phi_1]}{\partial \omega_2} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial [\Phi_1]}{\partial a_2} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial (\xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial (\beta_1, \beta_2, \gamma_2)} \neq 0. \quad (38)$$

Условие (38) эквивалентно следующему:

$$\left(\frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_2 \partial a_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial \omega_2^2} \cdot \frac{\partial^2 [\Phi_1]}{\partial a_2^2} \neq 0. \quad (39)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям переменных, получим явное выражение функции $[\Phi_1]$. Вычисляя интеграл (30) и учитывая, что $\omega_1=0$ ($g_0=0$), будем иметь

$$v[\Phi_1] = k[u_{0,0}(\theta, \rho) + u_{2,2}(\theta, \rho) \cos 2h'_0] \quad (40)$$

в случае соизмеримости $\bar{k}_1:\bar{k}_2=1:1$ и

$$v[\Phi_1] = k[u_{0,0}(\theta, \rho) + u_{1,2}(\theta, \rho) \cos 2h'_0] \quad (41)$$

в случае соизмеримости $\bar{k}_1:\bar{k}_2=1:2$. Коэффициенты в (40), (41) определяются формулами (10), в которых нужно положить $\cos \theta = \frac{L_0}{G_0}$, $\cos \rho = \frac{H'_0}{G_0}$, где L_0 , G_0 , H_0 — порождающие значения соответствующих переменных.

В случаях соизмеримости $\bar{k}_1:\bar{k}_2=1:-1$ и $\bar{k}_1:\bar{k}_2=1:-2$ заменой $\rho=\rho'-\pi$ функция $v[\Phi_1]$ приводится к тому же виду, что и в (40), (41). Данным методом мы можем исследовать периодические решения для соизмеримостей $1:\pm 1$ и $1:\pm 2$.

Теперь мы можем записать условие (36) в явном виде

$$u_{2,\pm 2}(\theta, \rho) \sin 2h'_0 = 0 \quad (42)$$

для соизмеримостей $1:\pm 1$ и

$$U_{1,\pm 2}(\theta, \rho) \sin 2h'_0 = 0 \quad (43)$$

для соизмеримостей $1:\pm 2$.

Уравнения (42), (43) имеют решения $h'_0=0$, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3}{2}\pi$, которые означают, что в начальный момент времени проекция оси динамической симметрии спутника на основную плоскость либо совпадает с радиус-вектором центра масс спутника, либо ортогональна ему.

Уравнение (37) удобнее записать относительно порождающего значения переменной ρ

$$\frac{1}{G_0 \sin \rho} \frac{\partial [\Phi_1]}{\partial \rho} = 0. \quad (44)$$

Подставляя выражения (40), (41) в уравнение (44), преобразуем его:

$$\cos \rho = \frac{\varepsilon \sin^2 \theta}{(6 - \varepsilon) \sin^2 \theta - 4} \quad (45)$$

для $\bar{k}_1:\bar{k}_2=1:1$ и

$$\sin \rho \cos \rho \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 2\theta (\cos \rho + \cos 2\rho) = 0 \quad (46)$$

для $\bar{k}_1:\bar{k}_2=1:2$, где введено обозначение $\varepsilon = \cos 2h'_0 = \pm 1$.

Результаты численного анализа зависимостей (45) и (46) для порождающих значений θ и ρ представлены графически (рис. 2, рис. 3).

Наконец, условие существования (39), которое нетрудно написать в явном виде и исследовать непосредственно, выполняется всегда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Сб. «Искусственные спутники Земли», т. 13, 1959.
2. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», 1963, 3, 528.
3. Zlatoustov V. A., Markeev A. P. «Celestial Mechanics», 1973, 7, 31.

4. Vinh N. X. «Celestial Mechanics», 1973, 8, 371.
5. Волков М. С. «Бюлл. ИТА», 1963, 9, 144.
6. Волков М. С. «Бюлл. ИТА», 1963, 9, 283.
7. Пуанкаре А. Избранные труды. М., 1971.
8. Торжевский А. П. «Космические исследования», 1968, 6, вып. 1.
9. Торжевский А. П. «Astronautica Acta», 1969, 14.
10. Andoyer H. «Cours de Mecanique Celeste», 1923, 1.
11. Баркин Ю. В. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1975, 16, № 1.

Поступила в редакцию

6.7 1976 г.

Кафедра

небесной механики

и гравиметрии