по формуле (7). Экспериментальные точки достаточно хорошо ложатся на расчетные кривые.

На рис. 3 приведены экспериментальные значения фазовой скорости спектральных компонентов и рассчитанные по формулам (8) и (9). Эксперимент показал, что фазовая скорость существенно зависит от динамической скорости воздушного потока, увеличиваясь с ее ростом.

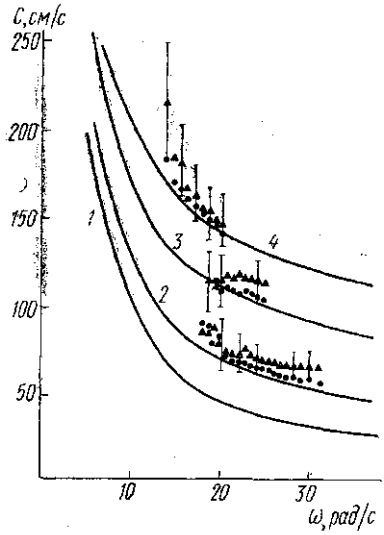

Рис. 3. Зависимость $c(\omega)$; кривые 1—4 рассчитаны по формуле (9) при $V_*=0$; 20,8; 63; 99 см/с соответственно. Треугольнички означают экспериментальные значения (формула (2)), точки — расчет по формуле (8), в которую входили экспериментально определенные (формула (1)) значения k

Эмпирические формулы (7), (8), (9) позволяют оценить влияние динамической скорости воздуха на дисперсионное соотношение для компонентов частотного спектра волн в начальной стадии развития $\left(\frac{c}{V_*} \sim 1\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954.
2. Wright J. W., Keller W. C. «The physics of fluid», 1971, **14**, N 3, 466.
3. Кононкова Г. Е. Динамика морских волн. Изд-во МГУ, 1969.
4. Stegen G. R., Van Atta C. W. «J. Fluid Mech.», 1971, **42**, N 4, 689.
5. Wu J. «J. Fluid Mech.», 1975, **68**, N 1, 49.

Поступила в редакцию
8.7 1977 г.
Кафедра
физики моря и вод суши

УДК 621.384.6.01

Ю. А. Пирогов

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В последнее время особый интерес проявляется к режимам пространственного заряда в интенсивных релятивистских потоках, которые стали широко применяться в ускорителях заряженных частиц для генерирования мощных излучений сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн. Поэтому знание точного аналитического решения уравнения Пуассона в форме, удобной для нахождения предельных режимов токопрохождения, представляется необходимым и весьма полезным. Ранее было найдено точное решение для одномерного потока частиц, справедливое для участков разгона заряженных частиц от нулевых скоростей до релятивистских [1]. В настоящем сообщении получено точное аналитическое решение одномерного уравнения Пуассона,

справедливое для моноскоростных потоков при любых энергиях частиц — от нерелятивистских до ультрарелятивистских — и при любых потенциалах границ рассматриваемой области пространства.

Возьмем уравнение Пуассона в виде

$$2\frac{d^2U}{d\theta^2}=\frac{U+1}{(U^2+2U)^{1/2}}, \tag{1}$$

где

$$\theta=\xi x;\qquad U=\frac{V}{V_0};\qquad V_0=\frac{m_0c^2}{Ze};\qquad \xi^2=\frac{2j}{V_0\varepsilon_0 c};$$

V — потенциал в данной точке x-пространства, j — плотность тока в рассматриваемой области пространства, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, m_0 и Ze — масса покоя и заряд частицы, c — скорость света. Заметим, что к форме (1) нетрудно перейти от обычной записи уравнения Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\frac{j}{\varepsilon_0 v},$$

если применить релятивистское соотношение между скоростью v и энергией U частицы:

$$v=c\,(U^2+2U)^{1/2}(U+1)^{-1}. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) дает следующую интегральную форму:

$$\theta=\pm\int\frac{dU}{\{(U^2+2U)^{1/2}+A\}^{1/2}}+B^*, \tag{3}$$

где A и B^* — постоянные интегрирования.

Произведя замену

$$t=(U^2+2U)^{1/2}, \tag{4}$$

получаем эллиптический интеграл второго рода:

$$\theta=\pm\int\frac{t\,dt}{\sqrt{(t+A)(1+t^2)}}+B^*. \tag{5}$$

Пользуясь известной процедурой преобразования [2] интегралов типа (5) к табличным эллиптическим интегралам, получаем:

$$\theta=\mp\frac{A}{(A^2+1)^{1/4}}F(k,\ \varphi)\pm$$

$$\pm(A^2+1)^{1/4}\left\{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+F(k,\ \varphi)-2E(k,\ \varphi)\right\}+B, \tag{6}$$

где

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}\right);$$

$$\varphi=2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t+A}{\sqrt{A^2+1}}\right)^{1/2};$$

$$F(k,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$ — неполный эллиптический интеграл первого рода;

$$E(k,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$ — неполный эллиптический интеграл второго рода.

Уравнение (6), являющееся общим решением уравнения (1), описывает все возможные режимы пространственного заряда в одномерных моноскоростных потоках, в том числе и нерелятивистские и ультрарелятивистские. В частности, для режима ограничения тока пространственным зарядом в обычном диоде с нулевым потенциалом катода $\left(A=0,\ k=\frac{1}{\sqrt{2}},\ B=0\right)$ из (6) получается:

$$\theta = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi + F(k,\ \varphi) - 2E(k,\ \varphi)}. \qquad (7)$$

В нерелятивистском случае ($U\to 0$, $t\to 0$, $\varphi\to 0$) имеем

$$\theta^2 = \frac{1}{144}\varphi^6$$

или

$$j = \frac{4}{9x^2}\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m_0}}V^{3/2}$$

известный закон Чайльда—Лангмюра.

В релятивистском приближении ($U\gg 1$, $t\cong U\to\infty$, $\varphi\to\pi$) можно пренебречь под корнем в (7) значением $\sin\varphi\cong 0$ по сравнению с единицей, а также функциями $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$, которые при $\varphi\cong\pi$ являются величинами порядка единицы и много меньше, чем $\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\to\infty$. В таком случае получается

$$\theta^2 \cong 4\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2} \cong 4U,$$

т. е. известная ультрарелятивистская формула с линейной зависимостью от потенциала

$$j = \frac{2\varepsilon_0 c}{x^2}V.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Boers J. E., Kelleher D. «J. Appl. Phys.», 1969, **40**, N 6, 2409.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., 1958.

Поступила в редакцию
19.8 1977 г.
Кафедра
радиофизики СВЧ

УДК 531.7.052.5

Л. А. Шенявский
В. И. Шмальгаузен

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ИНТЕРФЕРОМЕТР ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ МАЛЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Принцип поляризационного интерферометра [1] был успешно использован для исследования степени пространственной когерентности излучения лазера [2]. Достоинства этой схемы — высокая идентичность лучей и возможность плавно регулировать их разнесение в пространстве обеспечили большую чувствительность метода. Модификация схемы поляризационного интерферометра позволяет использовать достоинства этого прибора при исследовании деформаций колеблющихся объектов. Принцип действия измерителя малых деформаций поясняется рис. 1.

Плоскополяризованный луч от лазера Л попадает в электрооптическую ячейку Э. В ячейке между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает сдвиг фаз $\Delta\varphi_m$, зависящий от напряжения, подаваемого на вход ячейки (Вх). Пройдя через ячейку и полупрозрачное зеркало З, луч попадает на пластину из кальцита перпендикулярно ее естественной грани. Из пластины выходят два параллельных луча, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, которые попадают на объект О в точках *а* и *б*. Исследуемая поверхность объекта перпендикулярна направлению лучей и поэтому отраженные от объекта (или рассеянные им) лучи сходятся после прохождения пластины П в обратном направлении. Эти лучи, отражаясь от полупрозрачного зеркала З, попадают на анализатор А, представляющий собой модифицированную призму Франка—Риттера. В результате интерференции поляризованных лучей на поверхностях фотодиодов $Д_1$ и $Д_2$ образуются взаимно дополнительные интерференционные картинки. Если при отражении от объекта свет частично деполяризуется, то деполяризованные