УДК 539.1.01

Д. Л. Четвериков
Г. А. Чижов

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОЙ ВОЛНЫ

Методами классической теории рассматривается движение и излучение заряда в поле плоской амплитудно-модулированной волны круговой поляризации. Исследуется угловое распределение интенсивности излучения частиц как в случае гармонической модуляции падающей волны, так и в случае произвольной амплитудной модуляции с учетом поляризационных эффектов. Найдена полная интенсивность излучения при рассеянии амплитудно-модулированной волны на заряде.

Особенности движения и излучения заряда в поле монохроматической волны изучены достаточно полно как квантовыми, так и классическими методами (см., например, [1]). Вместе с тем в связи с развитием техники модуляции лазерного излучения и появлением многочастотных лазеров [2] практический интерес представляет изучение процессов взаимодействия модулированного лазерного луча с заряженными частицами. Этим и объясняется большое количество работ, посвященных исследованию различных эффектов в полях немонохроматических волн, особенно в случае суперпозиции двух монохроматических волн (отметим [3, 4]). Особый интерес может вызвать случай гармонической амплитудной модуляции (ГАМ), которую можно рассматривать как суперпозицию трех монохроматических волн. Поэтому в предлагаемой статье исследуется излучение заряда в поле ГАМ-волны и, кроме того, затронут случай произвольной амплитудной модуляции (АМ).

Постановка задачи. Гармоническая модуляция. Под циркулярно-поляризованной АМ-волной будет пониматься волна с напряженностью поля

$$\mathbf{E} = E_0\mathscr{P}(\xi)\{\mathbf{e}_x \cos\omega\xi + \mathbf{e}_y \sin\omega\xi\}.$$

Волна распространяется вдоль оси z; E_0 — амплитуда, ω — частота волны (несущая), $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — единичные орты, $\xi = t - z/c$, $\mathscr{P}(\xi)$ — некоторая скалярная периодическая функция ξ. Выбрана правая круговая поляризация.

Рассмотрим сначала случай гармонической амплитудной модуляции, когда $\mathscr{P}(\xi) = 1 + \delta\cos\omega'\xi$, где δ — глубина, а ω' — частота модуляции. В этом случае исходную волну можно представить в виде суперпозиции трех волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)},$$

где

$$\mathbf{E}^{(0)} = E_0\{\mathbf{e}_x \cos\omega\xi + \mathbf{e}_y \sin\omega\xi\},$$

$$\mathbf{E}^{(\pm)} = \frac{\delta E_0}{2}\{\mathbf{e}_x \cos\omega_\pm\xi + \mathbf{e}_y \sin\omega_\pm\xi\}.$$

Здесь $\omega_\pm=\omega\pm\omega'$. Обычно под ГАМ-волной понимается случай, когда $\omega'\ll\omega$, $\delta<1$. Мы пока не будем накладывать таких ограничений. В общем случае можно говорить о суперпозиции трех волн со связанными параметрами, причем при $\omega'<\omega$ все три волны имеют правую поляризацию, а при $\omega'>\omega$ $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{E}^{(+)}$ — правую, а $\mathbf{E}^{(-)}$ — левую.

Предположим, что в момент начала взаимодействия волны с зарядом e он двигался по оси z ($\mathbf{p}_{0\perp}=0$). Тогда движение заряда в ГАМ-волне будет представлять собой суперпозицию поступательного движения с постоянной скоростью вдоль оси z, вращательного движения с переменным радиусом вокруг оси z и осцилляций вдоль оси z. Все последующие выкладки относятся к системе отсчета, где заряд в среднем покоится. В этой системе движение происходит по закону

$$x=-\frac{ac}{\omega}\left(\cos\omega\xi+\frac{\delta}{2}\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_+}\right)^2\cos\omega_+\xi+\left(\frac{\omega}{\omega_-}\right)^2\sin\omega_-\xi\right\}\right),$$
$$y=-\frac{ac}{\omega}\left(\sin\omega\xi+\frac{\delta}{2}\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_+}\right)^2\sin\omega_+\xi+\left(\frac{\omega}{\omega_-}\right)^2\sin\omega_-\xi\right\}\right),\qquad(1)$$
$$z=\frac{a^2c}{\omega'}\left(\frac{\delta}{1-\mu^2}\sin\omega'\xi+\frac{\delta^2}{8(1-\mu^2)}\sin 2\omega'\xi\right),$$

который легко получить известным образом [5]. Здесь

$$a=\gamma\left(1+\frac{e^2}{m^2c^4}\overline{A_b^2}\right)^{-1/2}=\gamma(1+\gamma^2(1+b))^{-1/2},$$
$$\gamma=\frac{eE_0}{mc\omega},\quad b=\frac{\delta^2}{2}\frac{1+\mu^2}{(1-\mu^2)^2},$$

$\mu=\dfrac{\omega'}{\omega}$, m — масса, $\mathbf{A}_b$ — потенциал поля волны. Черта означает усреднение по ξ. Выражение для радиуса орбиты имеет вид

$$R^2=x^2+y^2=\left(\frac{ac}{\omega}\right)^2\left\{1+\frac{\delta^2}{4}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_+}\right)^4+\left(\frac{\omega}{\omega_-}\right)^4\right]+\right.$$
$$\left.+\delta\left[\left(\frac{\omega}{\omega_+}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_-}\right)^2\right]\cos\omega'\xi+\frac{\delta^2\omega^4}{2(\omega_+\omega_-)^2}\cos 2\omega'\xi\right\}.\qquad(2)$$

Изменение радиуса со временем определяется частотой модуляции ω'.

Вектор скорости заряда составляет с плоскостью xy угол φ, зависящий от ξ по закону

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{2}{a\chi}\sqrt{1+b+\chi},\qquad(3)$$

где

$$\chi=\frac{2\delta}{1-\mu^2}\cos\omega'\xi+\frac{\delta^2}{2(1-\mu^2)}\cos 2\omega'\xi.$$

Отсюда видно, что при малых δ вектор скорости отклоняется от плоскости xy на угол $\varphi\sim\delta$. В этом случае излучение заряда мало отличается от синхротронного. Если же глубина модуляции не мала, то z-составляющая скорости не мала по сравнению с xy-составляющей и характер излучения может существенно измениться.

В системе, где заряд в среднем покоится, выражения для скорости в случае произвольной плоской волны имеют вид [5]

$$\beta_\perp=-\mathbf{A}(1+\Phi)^{-1},\quad\beta_z=\Phi(1+\Phi)^{-1},\qquad(4)$$

где $\mathbf{A}=a\mathbf{A}_b/A_0$, $\Phi=\frac{1}{2}(A^2-\overline{A^2})$ ($\mathbf{A}_b$ — потенциал поля волны, A_0 — его амплитуда).

Формулы Лиенара — Вихерта позволяют вычислить π- и σ-компоненты интенсивности излучения заряда. Разбиение на компоненты проведено обычным образом [1]. Интенсивности выражаются следующими формулами:

$$W_{\pi,\sigma}=\frac{e^2}{2c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi\,\overline{S}_{\pi,\sigma},$$

$$S_\pi=\frac{\{(1-\sin\psi)(\Phi' A_x-\Phi A_x')+\Phi'\cos\psi+A_x'\sin\psi\}^2}{\{1+\Phi(1-\sin\psi)+A_x\cos\psi\}^5},\tag{5}$$

$$S_\sigma=\frac{\{(1-\sin\psi)(\Phi A_y'-\Phi' A_y)+\Psi\cos\psi+A_y'\}^2}{\{1+\Phi(1-\sin\psi)+A_x\cos\psi\}^5},$$

$$\Psi=A_xA_y'-A_x'A_y.$$

В формулах (5) ψ — угол между плоскостью xy и направлением наблюдения. Приведенные формулы справедливы в случае произвольной АМ-волны круговой поляризации, причем усреднение проводится по большому промежутку времени, что позволяет считать угловое распределение аксиально-симметричным.

Усреднение по времени в общем случае представляется громоздким, поэтому мы ограничимся здесь нерелятивистским ($\gamma\ll 1$, т. е. $a\ll 1$ и $\beta\ll 1$) и ультрарелятивистским ($\gamma\gg 1$, $\beta\approx 1$) случаями.

Нерелятивистский случай. Проводя в общих формулах (5) разложение по параметру $a\ll 1$, получим следующие выражения для полных (проинтегрированных по углу) мощностей π- и σ-компонентов:

$$W_\pi=\frac{2e^2}{c}\left\{\frac{1}{6}\overline{A_x'^2}+\overline{(A_xA_x')^2}+\frac{1}{3}\overline{\Phi' A_xA_x'}-\frac{1}{2}\overline{\Phi A_x'^2}\right\},$$

$$W_\sigma=\frac{e^2}{c}\left\{\overline{A_y'^2}+\frac{2}{3}\left[\overline{\Psi^2}-10\overline{\Psi A_xA_y'}+15\overline{(A_xA_y')^2}\right]-3\overline{\Phi A_y'^2}-2\overline{\Phi A_yA_y'}\right\}.\tag{6}$$

В конкретном случае ГАМ-волны после усреднения будем иметь

$$W_\pi=\frac{a^2e^2\omega^2}{6c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)+\frac{a^4e^2\omega^2}{8c}\left(2+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2}{3}[3-13z+16z^2]-\frac{\delta^4}{6}[8z-11z^2]\right),\tag{7}$$
$$W_\sigma=\frac{a^2e^2\omega^2}{2c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)+\frac{a^4e^2\omega^2}{12c}\left(13+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2}{2}[13+13z+16z^2]-\frac{\delta^4}{4}[6z-21z^2]\right).$$

В формулах (7) $z=(1-\mu^2)^{-1}$ — резонансный множитель. Заметим, что случай $\mu=\frac{\omega'}{\omega}\sim 1$ должен быть рассмотрен особо.

Данное приближение справедливо при достаточно высоких интенсивностях волны (и соответственно скоростях заряда), так как учтены члены порядка γ^4. Достигнутые в настоящее время интенсивности лазеров соответствуют значению параметра $\gamma=0,1$ [6].

Подчеркнем, что формулы (7) позволяют рассматривать произвольный параметр δ и произвольные (кроме близких к единице) соотношения частот μ. В частности, при $\mu \ll 1$ имеем

$$W_\pi = \frac{a_1^2 e^2 \omega^2}{6c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{a_1^4 e^2\omega^2}{8c}\left(2+2\delta^2+\frac{1}{2}\delta^4\right),$$
$$W_\sigma = \frac{a_1^2 e^2 \omega^2}{2c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{a_1^4 e^2\omega^2}{12c}\left(13+21\delta^2+\frac{15}{4}\delta^4\right). \qquad (8)$$

Здесь $a_1^2=\gamma^2\left(1+\gamma^2\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)\right)^{-1}$. Случай $\mu \ll 1$ соответствует обычной ГАМ. Модуляция оказывает большее влияние на σ-компонент. Если же $\mu \gg 1$, то

$$W_\pi = \frac{a_0^2 e^2 \omega^2}{6c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{a_0^4 e^2\omega^2}{4c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right),$$
$$W_\sigma = \frac{a_0^2 e^2 \omega^2}{2c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{13a_0^4 e^2\omega^2}{12c}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right), \qquad (9)$$

где $a_0^2=\gamma^2(1+\gamma^2)^{-1}$.

Для полной интенсивности имеем

$$W = W_\pi + W_\sigma = \frac{e^2\omega^2}{3c}\left\{(2+\delta^2)(a^2+2a^4(1+b)) + \frac{a^4\delta^2 z}{8}(16+\delta^2)\right\}. \qquad (10)$$

Ультрарелятивистский случай. При больших интенсивностях волны ($\gamma \gg 1$) скорость заряда близка к c вне зависимости от начальных условий. Действительно, как видно из (4),

$$1-\beta^2 \sim 1-\overline{A^2} = (1+\gamma^2\overline{(\mathrm{A}_b A'_0)^2})^{-1}$$

и при больших γ $\beta^2 \to 1$. Для произвольных μ мы ограничимся случаем очень малой модуляции ($\delta < \gamma^{-2}$), чтобы получить поправки по δ к угловому распределению интенсивности синхротронного излучения. В этом случае излучение сконцентрировано вблизи плоскости xy, так что при разложении по δ мы будем полагать $\psi \sim \sqrt{\delta}$. Проводя разложение по δ и усреднение по ξ, получим поправки второго порядка к синхротронному излучению (линейные члены вклада не дают):

$$\Delta W_\pi(\psi) = \frac{5\delta^2 e^2\omega^2}{32c}\,\frac{1}{(1-\mu^2)^2(1-a_0^2\cos^2\psi)^{7/2}},$$
$$\Delta W_\sigma(\psi) = -\frac{\delta^2 e^2\omega^2}{64c}\,\frac{35+95\mu^2}{(1-\mu^2)^2(1-a_0^2\cos^2\psi)^{7/2}}. \qquad (11)$$

Здесь $\psi \sim \sqrt{\delta}$, $a_0^2=\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}$. Отметим, что в (11), как и в (7), случай $\mu \to 0$ соответствует АМ с $\omega' \ll \omega$.

Поскольку при $\psi=0$ интенсивность π-компонента синхротронного излучения равна нулю, именно поправка ΔW_π (ψ) определяет интенсивность π-компонента в интервале углов $|\psi|<\delta$. Поправка $\Delta W_\sigma(\psi)$

отрицательна и приводит к уменьшению интенсивности σ-компонента вблизи ее максимума $\psi=0$. При данных ограничениях на параметры ($\delta<\gamma^{-2}$) максимум $W_\sigma(\psi)$ приходится, как и в синхротронном излучении, на $\psi=0$. При рассмотрении ультрарелятивистского случая с произвольной глубиной модуляции будет показано, что максимум углового распределения может сдвигаться на углы, далекие от $\psi=0$.

Произвольная модуляция. Пусть теперь $\mathscr{P}(\xi)$ — произвольная периодическая функция ξ, мало меняющаяся за время $T=\frac{2\pi}{\omega}$: $|\mathscr{P}'(\omega)/\ll 1$ **или,** иначе, $T/T'\ll 1$, где T' — период $\mathscr{P}(\xi)$. В этих условиях можно положить

$$\mathbf{A}=a\mathscr{P}\{-\mathbf{e}_x\sin\omega\xi+\mathbf{e}_y\cos\omega\xi\},$$
$$\Phi=\frac{a^2}{2}\{\mathscr{P}^2-\overline{\mathscr{P}^2}\}, \tag{12}$$
$$a^2=\gamma^2(1+\gamma^2\overline{\mathscr{P}^2})^{-1}.$$

Кроме того, в формулах (5) усреднение по ξ теперь можно провести в два этапа: сначала по аргументу ξ, входящему в $S_{\pi,\sigma}$ в произведении $\omega\xi$, затем по ξ, входящему в медленно меняющуюся функцию $\mathscr{P}(\xi)$. Первое усреднение дает:

$$\overline{S}_\pi=\frac{a^2\omega^2}{8T'}\int\limits_0^{T'}\mathscr{P}^2R^2\frac{(4+Q^2/R^2)N^2}{(R^2-Q^2)^{7/2}}\,d\xi,$$
$$\overline{S}_\sigma=\frac{a^2\omega^2}{8T'}\int\limits_0^{T'}\mathscr{P}^2R^2\frac{4+3Q^2/R^2}{(R^2-Q^2)^{5/2}}\,d\xi. \tag{13}$$

Здесь

$$R=1+(1-\sin\psi)\Phi,$$
$$Q=a\mathscr{P}\cos\psi,$$
$$N=\sin\psi-(1-\sin\psi)\Phi,$$

а Φ дается формулой (12). Формулы (13) определяют угловое распределение интенсивности при произвольной модуляции $\mathscr{P}(\xi)$ и произвольной интенсивности падающей волны. Исследуем подробнее случай $\gamma\gg 1$. С учетом (12) знаменатель в (13) переписывается в виде

$$R^2-Q^2=\cos^2\psi(1+\gamma^2\overline{\mathscr{P}^2})^{-1}+N^2.$$

При $\gamma\gg 1$ оба подынтегральных выражения в (13) имеют резкий максимум в окрестности $N=0$. При фиксированном ξ S_σ имеет резкий максимум на некотором угле ψ_0 ($N(\psi_0)=0$), а S_π — два близлежащих максимума $\psi_{1,2}=\psi_0\pm\frac{\text{const}}{\gamma}$ с провалом до нуля посередине. Из условия $N=0$ находим $\sin\psi_0=\frac{\Phi}{1+\Phi}\approx\beta_z/\beta$, т. е., что ψ_0 — это угол, под которым по отношению к плоскости xy направлен в данный момент вектор скорости. Таким образом, адиабатически изменяющееся с амплитудой волны угловое распределение излучения располагается относительно вектора скорости аналогично распределению синхротронного излучения относительно плоскости вращения. Сам вектор скорости колеблется в пределах, определяемых углами

$$\varphi_{\min}=\frac{\Phi_{\min}}{1+\Phi_{\min}}<0 \text{ и } \varphi_{\max}=\frac{\Phi_{\max}}{1+\Phi_{\max}}>0$$

этого вектора с плоскостью xy, что соответствует максимальной и минимальной скоростям β_z. Поэтому в рассматриваемом ультрарелятивистском случае излучение будет сконцентрировано в области

$$\varphi_{\min}-\Delta\varphi<\psi<\varphi_{\max}+\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi\sim\sqrt{1-\beta^2}\sim\gamma^{-1}$, причем $\Delta\varphi\ll|\varphi_{\text{экстр}}|$, если глубина модуляции велика по сравнению с γ^{-1} (ср. [3]).

Что касается усредненного по времени углового распределения, то его максимумы определяются, во-первых, мощностью излучения заряда в тот момент, когда вектор его скорости «смотрит» в фиксированный интервал углов $\psi'<\psi<\psi'+\Delta\psi$, и, во-вторых, временем, в течение которого это происходит. При не слишком глубокой модуляции второй фактор может стать преобладающим. Очевидно, это произойдет тогда, когда ускорение по оси z минимально. Действительно, исходя из соотношения

$$\sin\varphi=\beta_z=\Phi(1+\Phi)^{-1}, \tag{14}$$

легко убедиться, что при $\Phi'\neq0$ $\Delta t\sim\Delta\varphi$, а при $\Phi'=0$ $\Delta t\sim\sqrt{\Delta\varphi}\gg\Delta\varphi$. Точки же, где $\Phi'=0$, соответствуют $\dot\beta_z=0$ (штрих означает производную по ξ, точка — по времени). Но, как видно из (14), условие $\Phi'=0$ означает максимум $|\beta_z|$ и $|\varphi|$ (а также экстремум $\mathcal{P}(\xi)$). Поэтому естественно ожидать, что при не слишком глубокой модуляции в усредненном угловом распределении максимумы будут приходиться на углы $\psi_{\max}=\varphi_{\max}$ и $\psi_{\min}=\varphi_{\min}$ — на края зоны, в которую в основном происходит излучение. Далее условие, необходимое для этого, будет уточнено.

Переходя в (13) к переменной N и проводя интегрирование с учетом резкого максимума в подынтегральных выражениях, можно получить следующие оценки для $W_\pi(\psi)$ и $W_\sigma(\psi)$, справедливые при

$$\psi_{\min}+\Delta\varphi<\psi<\psi_{\max}-\Delta\varphi,$$

т. е. не слишком близко к краям зоны излучения:

$$\begin{aligned} W_\pi&=\frac{\omega^2e^2}{12c}\,\frac{1+\sin\psi}{(1-\sin\psi)^4}\,\frac{(1+\gamma^2\mathcal{P}^2)^2}{|\Phi'(\xi_0)T'|},\\ W_\sigma&=\frac{7\omega^2e^2}{12c}\,\frac{1+\sin\psi}{(1-\sin\psi)^4}\,\frac{(1+\gamma^2\mathcal{P}^2)^2}{|\Phi'(\xi_0)T'|}, \end{aligned} \tag{15}$$

где ξ_0 — корень уравнения

$$\Phi(\xi)=\frac{\sin\psi}{1-\sin\psi}. \tag{16}$$

«Размывание» π- и σ-компонентов в области $\psi_{\min}+\Delta\varphi<\psi<\psi_{\max}-\Delta\varphi$ происходит по одинаковому закону. Вблизи краев зоны излучения $\psi_{\min,\max}$ характер углового распределения существенно меняется по сравнению с (15), причем

$$W_{\pi,\sigma}(\psi_{\min,\max})\sim\gamma^5\mathcal{P}_{\min,\max},$$

где $\mathcal{P}_{\min,\max}$ — экстремум $\mathcal{P}(\xi)$. Сравнивая с (15), получаем условие того, что угловое распределение имеет максимум на $\psi_{\min}$:

$$\gamma\mathcal{P}_{\min} \gg 1. \tag{17}$$

Максимум на $\psi_{\max}$ имеется всегда. При наличии нескольких экстремумов и выполнении условия (17) угловое распределение будет иметь соответствующее количество максимумов.

Полные интенсивности π- и σ-компонентов в ультрарелятивистском случае имеют вид

$$\begin{aligned} W_\pi &= \frac{\omega^2 e^2}{12c}\gamma^2 (1+\gamma^2\overline{\mathcal{P}^2})\,\overline{\mathcal{P}^2(1+\Phi)}, \\ W_\sigma &= \frac{7\omega^2 e^2}{12c}\gamma^2 (1+\gamma^2\overline{\mathcal{P}^2})\,\overline{\mathcal{P}^2(1+\Phi)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Суммируя, получаем

$$W = W_\pi + W_\sigma = \frac{2}{3}\,\frac{e^2\omega^2}{c}\gamma^2 (1+\gamma^2\overline{\mathcal{P}^2})\,\overline{\mathcal{P}^2(1+\Phi)}. \tag{19}$$

Итак, нами изучено угловое распределение излучения заряда в поле плоской АМ-волны с учетом поляризационных эффектов. Авторы надеются, что в дальнейшем удастся описать и спектральные характеристики процесса.

Авторы выражают благодарность проф. И. М. Тернову за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
2. Ярив А. Квантовая электроника и нелинейная оптика. М., 1973.
3. Люлька В. А. ЖЭТФ, 1977, 72, 865.
4. Борисов А. В., Горяга О. Г., Жуковский В. Ч. «Изв. вузов. Физика», 1977, 2, 46.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
6. Ostriker J. P., Gunn J. E. «Astrophys J.», 1969, 157, 1395.

Поступила в редакцию
24.5 1977 г.
Кафедра
квантовой теории