

УДК 535.416.3

К. Д. Егоров  
В. П. Кандидов

## САМОФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Численно исследуется стационарная самофокусировка пучков эллиптического сечения при режимах, близких к критическим. Процесс распространения носит осциллирующий характер. При закритических режимах пучок распадается на нити. Описан вычислительный алгоритм и исследована его точность.

При распространении светового пучка в нелинейных средах может наблюдаться распад его на нити [1]. В связи с этим представляет интерес изучение самофокусировки пучков, не имеющих осевой симметрии. В работе [2] эта задача исследуется энергетическим методом в предположении, что пучок сохраняет гауссов профиль эллиптического сечения. Результаты численного моделирования описаны в [3], где получен распад на нити пучка без осевой симметрии при закритическом значении параметров. В [4] рассчитано развитие несимметричного возмущения на пучке кругового сечения.

В настоящей работе рассматривается стационарная самофокусировка пучков эллиптического сечения при режимах, близких к критическим. Для численного исследования применен метод конечных элементов, на примере которого оценивается точность расчетной схемы в задаче самофокусировки.

В параболическом приближении распространение пучка в среде с кубической нелинейностью описывается уравнением

$$2i \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} = \Delta_{\perp} \mathcal{E} + R \mathcal{E} \mathcal{E}^* \mathcal{E}, \quad (1)$$

где  $\mathcal{E}$  — безразмерная комплексная амплитуда электрического поля,  $\Delta_{\perp}$  — оператор Лапласа по безразмерным переменным  $x$  и  $y$ ,  $R = k^2 a_0^2 \epsilon_2 I_0$  — параметр нелинейной рефракции,  $a_0$ ,  $I_0$  — характерный поперечный размер и интенсивность пучка на входе  $z=0$ . Для ограниченного пучка  $\mathcal{E} \rightarrow 0$  при  $x, y \rightarrow \pm \infty$ .

Как показано в [5], характер распространения определяется знаком  $H$ , имеющим смысл функции Гамильтона. Для  $H \leq 0$  пучок фокусируется, а для  $H \geq 0$  — расходит. Первое неравенство показывает, что полная мощность  $P$ , необходимая для возникновения самофокусировки, должна превышать некоторое пороговое значение.

Если ввести скалярное произведение функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности,

$$(f, g) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy, \quad (2)$$

то

$$P = (\mathcal{E}, \mathcal{E}^*). \quad (3)$$

Соответственно для кубической среды

$$H = (\nabla_{\perp} \mathcal{E}, \nabla_{\perp} \mathcal{E}^*) - \frac{R}{2} (\mathcal{E} \mathcal{E}^*, \mathcal{E} \mathcal{E}^*). \quad (4)$$

Условие  $H=0$  определяет критическое значение параметра  $R_{кр}$ , которое может быть вычислено для пучка с известным начальным профилем  $\mathcal{E}(x, y, 0)$ . Аналитическое выражение для  $R_{кр}$  в случае эллиптических пучков гауссова профиля с плоским фазовым фронтом получено в [2].

Для численного моделирования задачи самофокусировки существенна консервативность расчетной схемы, при которой сохраняются интегралы движения (3), (4). Одним из путей построения таких схем любого порядка точности является использование метода конечных элементов.

Запишем действие

$$S = \int_0^z \left\{ i \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial z}, \mathcal{E} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}, \mathcal{E}^* \right) \right] - H \right\} dz. \quad (5)$$

Из условия стационарности  $S$  следует задача (1) о самофокусировке в кубической среде с известным профилем при  $z=0$ .

Для построения расчетной модели заменим бесконечную область изменения переменных  $x, y$  прямоугольником  $\Omega$  со сторонами  $L_x, L_y \gg \gg a_0$ . Положим на границе области  $\mathcal{E} = 0$ . Разобьем  $\Omega$  на  $N \times M$  прямоугольных элементов размера  $h_x \times h_y$ .

Согласно методу конечных элементов любую функцию  $f(\xi, \eta, z)$  на элементе  $e$  выразим через ее значения  $f_{ij}^{(e)}(z)$  в ближайших узлах сетки

$$f^{(e)}(\xi, \eta, z) = \sum_{i,j=1}^4 f_{ij}^{(e)}(z) X_j(\xi) Y_i(\eta), \quad (6)$$

где  $\xi, \eta$  — локальные координаты элемента. Базисные функции  $X_j(\xi), Y_i(\eta)$  возьмем в виде полиномов Лагранжа третьей степени. Тогда  $f^{(e)}(\xi, \eta, z)$  на элементе  $e$  однозначно определяется шестнадцатью координатами  $f_{ij}^{(e)}$ . Вне элемента  $e$  функция  $f^{(e)}$  тождественно равна нулю. Таким образом,  $f(x, y, z)$  аппроксимируется на  $\Omega$  кусочно-определенной функцией, которая образуется совокупностью  $f^{(e)}(\xi, \eta, z)$ .

Подставив принятую аппроксимацию функций в (2), вычислим интегралы по отдельным элементам и просуммируем вклады от каждого из них. В результате получим скалярное произведение на сетке конечных элементов в виде

$$(f, \tilde{g}) = \mathbf{f}^T [\mathbf{M}] \mathbf{g}. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{f}^T$  — вектор, компонентами которого являются значения функции  $f(x, y, z)$  в узлах сетки:

$$\mathbf{f}^T = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1N}, f_{21}, \dots, f_{2N}, \dots, f_{M1}, \dots, f_{MN}\}. \quad (8)$$

Аналогично определяется

$$(\nabla_{\perp} f, \nabla_{\perp} g) = \mathbf{f}^T [\mathbf{D}] \mathbf{g}. \quad (9)$$

Способ вычисления и свойства матриц  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  описаны в приложении.

Действие для модели из конечных элементов выражается следующим образом:

$$\tilde{S} = \int_0^z \left( i \left\{ \frac{dE^T}{dz} [M] E^* - \frac{dE^{*T}}{dz} [M] E \right\} + E^T [D] E - \frac{R}{2} E E^{*T} [M] E E^* \right) dz, \quad (10)$$

где  $E, E E^*$  — векторы узловых значений амплитуды и интенсивности. Варьируя  $S$  по  $E^*$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, являющуюся дискретным аналогом уравнения (1):

$$2i [M] \frac{dE}{dz} = [D] E + R [E] [M] E E^*, \quad (11)$$

где  $[E] = \{\delta_{ik} E_k\}$  — диагональная матрица. Локальная погрешность аппроксимации системой (10) уравнения (1) имеет четвертый порядок точности  $o(h_x^4 + h_y^4)$ .

Можно показать, что на построенной схеме сохраняются инварианты (3), (4), которые запишутся в виде

$$\tilde{P} = E^T [M] E^*, \quad (12)$$

$$\tilde{H} = E^T [D] E^* - \frac{R}{2} E E^{*T} [M] E E^*. \quad (13)$$

Относительное отклонение  $\tilde{P}$  от  $P$  является энергетической оценкой точности модели из конечных элементов. Из условия  $\tilde{H} = 0$ , записанного при  $z=0$ , следует критическое значение параметра  $\tilde{R}_{кр}$  для модели. Относительное отклонение  $\tilde{R}_{кр}$  от  $R_{кр}$  естественно взять в качестве характеристики точности модели в задачах самофокусировки. По этому отклонению можно оценить целесообразный шаг разбиения на элементы. На рис. 1 приведена погрешность  $(R_{кр} - \tilde{R}_{кр})/R_{кр}$ , вычисленная для осесимметричного гауссова пучка с плоским фазовым фронтом в зависимости от его относительной ширины  $a_0/h$  ( $h_x = h_y = h$ ). Сплошная кривая соответствует построенной модели, пунктирная — пятиточечной конечно-разностной схеме. При одинаковой погрешности модель из конечных элементов допускает значительно больший шаг разбиения и, следовательно, позволяет понизить порядок системы (11). Благодаря этому уменьшаются вычислительные затраты, что является существенным при решении многомерных задач.

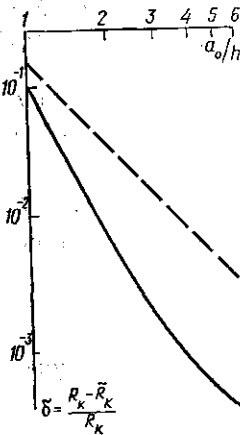


Рис. 1

С помощью разработанного алгоритма исследовалось распространение пучков с гауссовым профилем эллиптического сечения при  $z=0$ .

$$\mathcal{G}(x, y, z) = \exp \left( -\frac{x^2}{2a_0^2} - \frac{y^2}{2b_0^2} \right).$$

На рис. 2 приведена динамика профиля такого пучка с ростом  $z$ ; на левой половине — в плоскости  $XOZ$ , на правой —  $YOZ$  ( $R=2,5$ ). Изменение поперечных размеров пучка носит немонотонный характер, который вызван конкуренцией дифракции и нелинейной рефракции по осям  $OX$  и  $OY$ . Так, при  $z < 1$  в плоскости  $XOZ$

преобладает дифракционное расплывание, а в плоскости YOZ — самофокусировка. В дальнейшем ( $z > 3$ ) вследствие перераспределения мощности в поперечнике пучка характер изменения профиля в плоскостях XOZ и YOZ становится обратным. При этом с ростом  $z$  форма профиля существенно отличается от гауссовой. Значительная часть мощности уходит на периферию пучка. Для сравнения на рис. 2 изображен пунктиром гауссов профиль с полушириной  $a(z)$ ,  $b(z)$ , вычисленной по уровню  $e^{-1}$ .

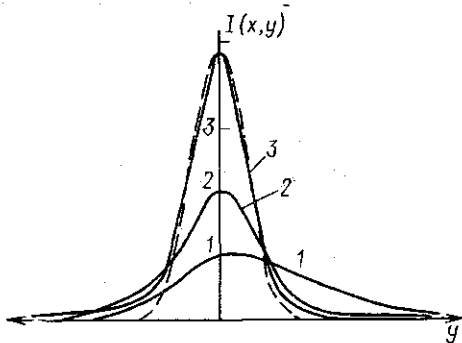


Рис. 2

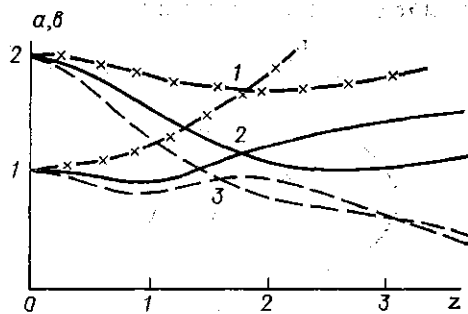


Рис. 3

Определенные таким образом поперечные размеры пучка  $a(z)$ ,  $b(z)$  приведены на рис. 3 для отношения полуосей  $b_0/a_0=2$  и ряда значений  $R$ . На фоне периодических изменений поперечных размеров пучка нетрудно проследить общую тенденцию в изменении профиля и определить значение  $R_{кр}$ , при превышении которого пучок схлопывается.

При большем эксцентриситете эллиптического пучка профиль его с ростом  $z$  претерпевает качественные изменения. В случае достаточно большой интенсивности ( $R \simeq (2 \div 3) R_{кр}$ ) наблюдается возникновение боковых максимумов, лежащих симметрично на большой полуоси эллипса. Можно найти критическое значение параметра  $R_{кр2}$ : при  $R < R_{кр2}$  боковые максимумы расплываются и мощность пучка уходит на периферию пучка, при  $R \geq R_{кр2}$  эти максимумы схлопываются и пучок распадается на три нити. Так, для гауссова пучка с  $b_0/a_0=3$   $R_{кр2}=5,3$ , с  $b_0/a_0=4$   $R_{кр2}=4,2$ .

Характерно, что в пучке с  $R < R_{кр2}$  энергия, сосредоточенная в боковом максимуме, остается меньше  $P_{кр}$ , вычисленной в [5], и такие максимумы рассасываются. При  $R > R_{кр2}$  энергия боковых максимумов, схлопывающихся в нить, оказывается близка к значению  $P_{кр}$ .

Линии равной интенсивности пучка с  $b_0/a_0=3$  изображены на рис. 4 для ряда значений  $z$ .

**Приложение.** Согласно (6) вклад в (2) от отдельного элемента равен

$$\sum_{l,j,k,l=1}^4 f_{lj}^{(e)} m_{ik}^{(x)} m_{jl}^{(y)} g_{kl}^{(e)}, \quad (14)$$

где

$$m_{ik}^{(x)} = \int_{-h_x/2}^{h_x/2} X_i(\xi) X_k(\xi) d\xi$$

Скалярное произведение (2) равно сумме (14) по всем элементам. После перехода от локальной нумерации узлов, связанной с элементом, к нумерации на всей области сумма примет вид

$$(f, \tilde{g}) = \sum_{i,k=1}^N \sum_{l,l=1}^M f_{ij} M_{ik}^{(x)} M_{lk}^{(y)} g_{lk}. \quad (15)$$

Здесь  $\{M_{ik}^{(x)}\}$ ,  $\{M_{il}^{(y)}\}$  — глобальные матрицы размерности  $N \times N$  и  $M \times M$  соответственно. Они образуются с помощью объединения локальных матриц  $\{m_{ik}^{(x)}\}$ ,  $\{m_{lk}^{(y)}\}$  согласно взаимному расположению элементов и имеют семь не равных нулю диагоналей.

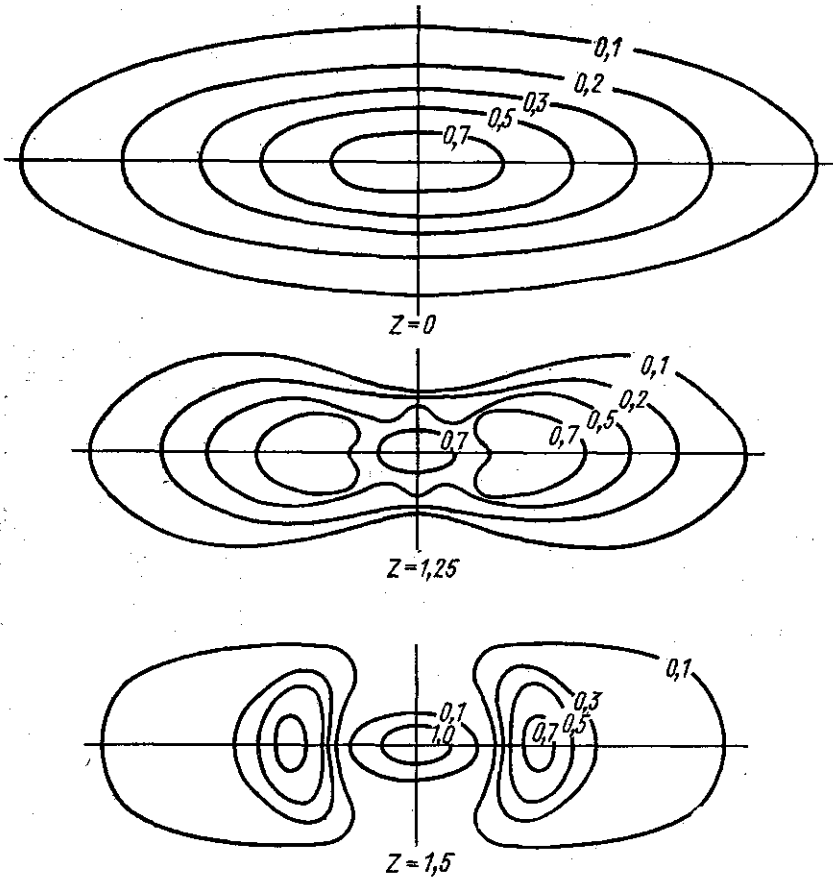


Рис. 4

Аналогично

$$(\nabla_{\perp} f, \nabla_{\perp} g) = \sum_{i,k=1}^N \sum_{l,l=1}^M f_{ij} (M_{ik}^{(x)} D_{il}^{(y)} + M_{il}^{(y)} D_{ik}^{(x)}) g_{lk},$$

где матрицы  $\{D_{ik}\}$  образованы объединением локальных матриц  $\{d\}$ ,

$$\{d^{(x)}\}_{ik} = \int_{-\hbar_x/2}^{\hbar_x/2} \frac{\partial X_i}{\partial \xi}(\xi) \frac{\partial X_k}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \quad (16)$$

В векторной форме (см. (8)) выражения (15), (16) принимают вид

$$(f, g) = \tilde{f}^T [M^{(x)}, M^{(y)}] g,$$

$$(\nabla_{\perp} \tilde{f}, \nabla_{\perp} g) = \tilde{f}^T ([M^{(x)}, D^{(y)}] + [D^{(x)}, M^{(y)}]) g.$$

Таким образом, в (7), (9)

$$[M] = [M^{(x)}, M^{(y)}],$$

$$[D] = [M^{(x)}, D^{(y)}] + [D^{(x)}, M^{(y)}].$$

Операцию, обозначенную квадратными скобками, назовем расширением. Расширенная матрица  $[M^{(x)}, M^{(y)}]$  образуется путем замены в матрице  $[M^{(x)}]$  каждого элемента  $m_{ij}^{(x)}$  матрицей  $m_{ij}^{(x)} [M^{(y)}]$ . Если  $[M^{(x)}]$  имеет порядок  $N \times N$ , а  $[M^{(y)}] = M \times M$ , то  $[M^{(x)}, M^{(y)}]$  будет квадратной матрицей порядка  $MN \times MN$ .

Операция расширения обладает свойствами, полезными при вычислениях. Так,

$$[a, b] \times [c, d] = [a \times c, b \times d].$$

Отсюда, в частности, следует:

$$[a, b]^{-1} = [a^{-1}, b^{-1}].$$

Таким образом, нет необходимости обращать матрицу размерности  $NM \times NM$ , а достаточно обратить две матрицы размерности  $N \times N$  и  $M \times M$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Луговой В. Н., Прохоров А. М. «Успехи физических наук», 1973, III, № 2, 203.
2. Воробьев В. В. «Изв. вузов. Радиофизика», 1970, 13, № 12, 190.
3. Резцов А. С., Тихонов Н. А. ДАН СССР, 1976, 231, № 2, 324.
4. Мاستрюков А. Ф., Сынах В. С. «Квантовая электроника», 1976, 3, № 11, 2473.
5. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С. ЖЭТФ, 1970, вып. 1, 136.

Поступила в редакцию  
27.9 1977 г.  
Кафедра общей физики  
для мехмата