

УДК 621.072

И. И. Минакова  
В. И. Панов  
С. Ю. Пашин

## ВЛИЯНИЕ ДЕСТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ФАКТОРОВ НА ЧАСТОТУ И ШИРИНУ ЛИНИИ ТРЕХКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА

В работе рассматривается влияние флуктуационных и дестабилизирующих факторов на долговременную стабильность частоты и ширину линии генерации трехрезонаторных СВЧ-генераторов со стабилизирующим сверхпроводящим резонатором. Для реального генератора на туннельном диоде анализируются условия получения относительной нестабильности частоты  $\leq 10^{-15}$ .

Высокостабильные генераторы с узкой естественной шириной линии находят широкое применение при разработке доплеровских локационных систем, датчиков малых колебаний, вторичных эталонов частоты и т. д. Одним из путей создания таких генераторов является использование сверхпроводящих резонаторов (СПР) в схемах с твердотельными

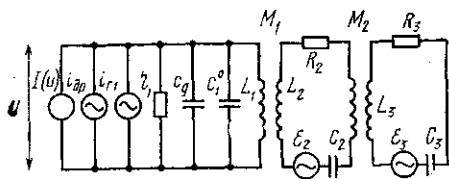


Рис. 1

активными элементами [1, 2]. В работе [2] было показано, что можно достичь существенного увеличения стабильности частоты СВЧ-генераторов, используя в качестве активного элемента туннельный диод, стабилизируемый трехрезонаторной схемой с СПР на основе сапфира. Такое устройство в принципе позволяет реализовать относительную

долговременную нестабильность частоты  $\sim 10^{15} \div 10^{16}$  при значительном сужении естественной ширины линии.

Создание трехрезонаторных генераторов с высокой стабильностью частоты требует более подробного анализа формы и естественной ширины линии генерации, а также влияния на стабильность частоты фликер-шума и основных дестабилизирующих факторов.

В настоящей работе рассматривается влияние дробовых и тепловых шумов в многоконтурном генераторе с туннельным диодом в качестве активного элемента и стабилизирующим СПР на естественную ширину линии генератора, оценивается влияние фликер-шума и основных дестабилизирующих факторов на долговременную стабильность частоты, анализируется зависимость коэффициента стабилизации от параметров системы.

Для одночастотных режимов трехрезонаторный генератор СВЧ-диапазона может быть представлен эквивалентной схемой с тремя контурами с сосредоточенными параметрами (рис. 1). Первый контур — контур генератора на туннельном диоде, третий — стабилизирующий (СПР) с высокой добротностью, промежуточный — второй контур должен иметь малую добротность. На рис. 1 введены обозначения:  $c_i$ ,  $L_i$ ,  $r_1$ ,  $R_i$  — параметры контуров,  $M_i$  — коэффициенты взаимной индукции,

$i_{T1}$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $i_{ДР}$  — эквивалентные источники тепловых шумов соответствующих контуров и дробового шума туннельного диода. Нелинейные характеристики туннельного диода могут быть представлены в виде

$$C_g = \frac{1}{2} \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0}{\varphi} - \frac{u}{2}}}, \quad I(u) = -\alpha_1 u + \alpha_2 u^3, \quad (1)$$

где  $u_0$  и  $u$  — постоянное и переменное напряжения, приложенные к  $p$ - $n$ -переходу туннельного диода. В этом случае система уравнений для токов  $i_i$ , протекающих через индуктивность  $L_i$ , имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{c_1} \left( \frac{1}{r_1} - \alpha_1 \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{L_1 c_1} i_1 = \\ & = -\gamma_1 \left( \frac{di_1}{dt} \right)^3 + \gamma_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{di_1}{dt} \right)^2 - \gamma_3 \frac{d}{dt} \left( \frac{di_1}{dt} \right) - \\ & \quad - \frac{M_1}{L_1^3 c_1} i_2 - \frac{i_{ДР}}{L_1 c_1} - \frac{i_{T1}}{L_1 c_1}, \\ & \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{R_2}{L_2} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{L_2 c_2} i_2 = \frac{M_1}{L_2} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{M_2}{L_2} \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{1}{L_2} \frac{de_2}{dt}, \quad (2) \\ & \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{R_3}{L_3} \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{L_3 c_3} i_3 = \frac{M_2}{L_3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{L_3} \frac{de_3}{dt}. \end{aligned}$$

В уравнениях (2)  $c_1 = c_1^0 + \frac{1}{2} \frac{c_0}{\sqrt{1 - u_0/\varphi}}$  — среднее значение емкости первого контура,  $\gamma_1 = \frac{L_1^2 \alpha_2}{c_1}$  — нелинейность вольтамперной характеристики туннельного диода,  $\gamma_2 = \frac{c_0 L_1}{8\varphi(1 - u_0/\varphi)^{3/2} c_1}$  и  $\gamma_3 = \frac{c_0 L_1^2}{64\varphi^2(1 - u_0/\varphi)^{5/2} c_1}$  — нелинейные члены, полученные из разложения  $c_g$  по степеням  $u$ .

С точки зрения стабилизации частоты наибольший интерес представляет область изменения параметров вблизи точки синхронизма, где частота генерации  $\omega = \nu_i$  ( $\nu_i$  — парциальные частоты контуров). В этом случае из (2) можно получить дифференциальные уравнения 6-й степени для токов в контурах. Для квазилинейной квазиконсервативной системы в отсутствие флуктуаций стационарное решение (2) в первом приближении имеет вид  $i_k = A_k \cos(\omega t + \theta_k)$ .

Для этого случая можно найти значения стационарных амплитуд токов в I и III контурах:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{4}{3} \frac{\left( \frac{k_2^2}{|Q_0|} - \frac{k_1^2}{Q_3} + \frac{1}{|Q_0| Q_2 Q_3} \right)}{\gamma_1 \omega \left( k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right)}, \\ A_3^2 &= A_1^2 \frac{k_{11}^2 k_{21}^2}{\left( k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right)}, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $k_i^2 = k_{ii} k_{ik} = M_i^2 / L_i L_k$  — коэффициенты связи между контурами,  $k_{ik} = M_i / L_k$  — частичные коэффициенты связи,  $Q_i$  — добротности контуров

$$|Q_0| = \frac{\omega}{2\delta_0} = \frac{\omega}{2 \left[ \frac{1}{2c_1} \left( \frac{1}{r_1} - \alpha_1 \right) \right]}$$

При учете флуктуаций решение уравнений (2) ищется в виде

$$i_k = [A_k + a_k(t)] \cos [\omega t + \varphi_k(t)],$$

где  $a_k(t)$ ,  $\varphi_k(t)$  — медленные (по сравнению с периодом  $T = 2\pi/\omega$ ) флуктуации амплитуды и фазы;

$$|a_k(t)| \ll A_k, \quad |\dot{\varphi}_k(t)| \ll \omega.$$

Подставив это решение в (2) и учитывая лишь первые производные от  $a_k(t)$  и  $\varphi_k(t)$  (члены первого порядка малости), получим выражения для прочности предельного цикла  $P$ , неизохронности  $q$  и коэффициента  $\delta$  системы

$$P = \frac{\omega \left( \frac{k_2^2}{|Q_0|} - \frac{k_1^2}{Q_3} + \frac{1}{Q_2 Q_3 |Q_0|} \right)}{\left( k_2^2 + k_1^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{|Q_0| Q_2} - \frac{1}{|Q_0| Q_3} \right)}, \quad (4)$$

$$q = \frac{\omega^3 \gamma_3 \left( \frac{k_2^2}{|Q_0|} - \frac{k_1^2}{Q_3} + \frac{1}{Q_2 Q_3 |Q_0|} \right)}{\gamma_1 \left( k_2^2 + k_1^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{|Q_0| Q_2} - \frac{1}{|Q_0| Q_3} \right)},$$

$$\delta = 4\omega^{10} \left( k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{|Q_0| Q_2} - \frac{1}{|Q_0| Q_3} \right)^2.$$

Эти соотношения справедливы при условии малой неизохронности генератора  $\omega\gamma_3/\gamma_1 \ll 1$ , что выполняется в рассматриваемой системе.

Спектральные плотности мощности шумов I и III контуров системы, определяемые тепловыми и дробовыми флуктуациями, в соответствии с [3] записываются в виде

$$S_I(\omega) = \omega^{12} \left[ k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right]^2 S_{др} + \frac{\omega^{10}}{L_1^2} \left[ k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right]^2 S_{1r} + \\ + \frac{k_{12}^2 \omega^{10}}{L_2^2 Q_3^2} S_{2r} + \frac{k_{12}^2 k_{22}^2 \omega^{10}}{L_3^2} S_{3r},$$

$$S_{III}(\omega) = \frac{\omega^{10}}{L_3^2} \left[ \frac{1}{|Q_0| Q_2} - k_1^2 \right]^2 S_{3r} + \frac{k_{21}^2 \omega^{10}}{L_2^2 |Q_0|^2} S_{2r} + \\ + \frac{k_{11}^2 k_{21}^2 \omega^{10}}{L_1^2} S_{1r} + \omega^{12} k_{11}^2 k_{21}^2 S_{др}.$$

Здесь

$$S_{др} = \frac{1}{2\pi} eI_0, \quad S_{1r} = \frac{1}{\pi} \kappa T \frac{L_1}{c_1 r_1}, \quad S_{2r} = \frac{1}{\pi} \kappa T R_2, \\ S_{3r} = \frac{1}{\pi} \kappa T R_3$$

спектральные плотности дробовых и тепловых шумов в контурах. Учитывая, что при  $T \sim 4,2$  К тепловыми шумами можно пренебречь, запишем

$$S_I(\omega) \approx \omega^{12} \left[ k_2^2 + \frac{1}{|Q_2 Q_3|} \right]^2 S_{др}, \quad S_{III}(\omega) \approx \omega^{12} k_{11}^2 k_{21}^2 S_{др}. \quad (5)$$

Используя спектральные характеристики шума и формулы (4), получим выражение для естественной ширины линии колебаний  $\Delta\Omega$  и формы спектральной линии колебаний в I и III контурах:

$$\Delta\Omega_{I,III} = \Delta\Omega = \frac{2\pi^2 S_{I,III}(\omega)}{\delta A_{1,3}^2} \left( 1 + \frac{q^2}{p^2} \right) = \\ = \frac{3\pi^2 \gamma_1 \omega^3 \left( k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right)^3 S_{др}}{8 \left( k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{|Q_2 Q_3|} - \frac{1}{|Q_0| Q_2} - \frac{1}{|Q_0| Q_3} \right)^2 \left( \frac{k_2^2}{|Q_0|} - \frac{k_1^2}{Q_3} + \frac{1}{|Q_0| Q_2 Q_3} \right)}. \quad (6)$$

$$W_{I,III}(\Omega) = \frac{A_{1,3}^2 \Delta\Omega}{2} \left[ \left\{ \frac{\Delta\Omega}{\pi} + (\omega - \Omega)^2 \right\}^{-1} + \left\{ p^2 + (\omega - \Omega)^2 \right\}^{-1} \right]. \quad (7)$$

Здесь  $\Omega$  — текущая частота.

Последнее соотношение найдено в пренебрежении несимметричной частью, которая мала при  $\omega r_3 / \gamma_1 \ll 1$ , и является справедливым при  $(\omega - \Omega) / \omega \ll 1$ . Полученные значения для  $S_i(\omega)$ ,  $\Delta\Omega_i$ ,  $W_i(\Omega)$  показывают, что основные спектральные характеристики, форма и естественная ширина линии являются едиными для всех парциальных систем. Следовательно, они не зависят от места подключения нагрузки, если подключение нагрузки к  $i$ -му контуру не изменяет  $Q_i$ .

Исследуем флуктуационные характеристики трехконтурной системы стабилизации частоты, исходя из формул (6). Основным фактором, характеризующим подавление шумов в системе, является отношение ширины линии одноконтурного генератора к ширине линии стабилизированного трехконтурного генератора. Используем уравнения (2), положив  $k_{12} = 0$ . Решение уравнения (2) дает в этом случае выражение для естественной ширины линии одноконтурного генератора

$$\Delta\Omega_1^i = \frac{3\pi^2 \omega^3 \gamma_1 S_{др} |Q_0|}{8}. \quad (8)$$

Из (6) и (8) находим отношение ширины линии одноконтурного и трехконтурного генератора

$$\frac{\Delta\Omega_1^i}{\Delta\Omega} = \frac{\left( k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} - k_1^2 \frac{|Q_0|}{Q_3} \right) \left( k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{|Q_0| Q_2} - \frac{1}{|Q_0| Q_3} \right)^2}{\left( k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right)^3}. \quad (9)$$

Соотношение (9) количественно определяет сужение линии одноконтурного генератора при переходе к трехконтурной системе стабилизации частоты. В работе [4] рассчитано, что сужение ширины линии происходит в  $S^2$  раз, где  $S$  — коэффициент стабилизации частоты по перестройке контура генератора. При упрощенном определении  $S$  по частотной кривой, без учета запаса регенерации и условий устойчивости, величина  $S^2$  может быть выражена в виде

$$S^2 = \left\{ 1 + \frac{k_1^2 \left( k_2^2 - \frac{1}{Q_3^2} \right)^2}{\left( k_2^2 + \frac{1}{Q_2 Q_3} \right)^2} \right\}^2. \quad (10)$$

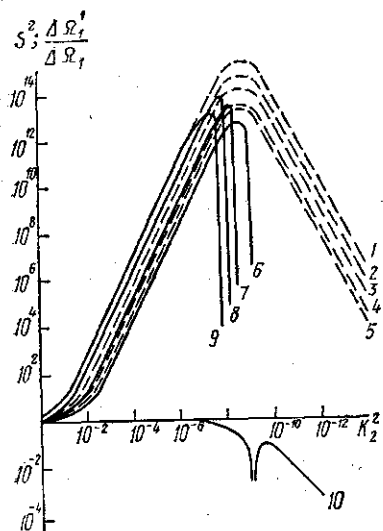


Рис. 2

Из сравнения (9) и (10) следует, что (9) является более точным выражением. В (9) учитывается вклад членов, определяющих запас регенерации в системе (члены, зависящие от  $|Q_0|$ ). На рис. 2 представлены рассчитанные зависимости  $\Delta\Omega_1/\Delta\Omega$  и  $S^2$  от коэффициентов связи  $k_1^2$  и  $k_2^2$  при заданных параметрах:  $|Q_0|=5$ ,  $Q_2=10$ ,  $Q_3=10^8$ . Как следует из приведенных графиков, расчеты по (9) и (10) дают совпадающие значения при сильных связях  $k_1^2 \gg 1/|Q_0|Q_2$ . При уменьшении связи  $k_2^2$  при значении

$$k_2^2 = k_1^2 \frac{|Q_0|}{Q_3} - \frac{1}{Q_2 Q_3}$$

устойчивость колебаний в точке синхронизма нарушается, вступает в силу «сложный» критерий устойчивости. В этом случае автоколебания при  $\omega = \nu$  неустойчивы и значение  $\Delta\Omega$  не определено (1 и 9 —  $k_1^2 = 2 \cdot 10^{-1}$ , 2 и 8 —  $k_1^2 = 1 \cdot 10^{-1}$ , 3 и 7 —  $k_1^2 = 5 \cdot 10^{-2}$ , 4 и 6 —  $k_1^2 = 3 \cdot 10^{-2}$ , 5 и 10 —  $k_1^2 = 2 \cdot 10^{-2}$ ). Этим объясняется резкий спад функции  $\Delta\Omega_1/\Delta\Omega$  при  $k_2^2 \approx 10^{-8}$ . При таких связях величина  $S^2$ , определяемая, по существу, как геометрический фактор частотной кривой, резко расходится со значением  $\Delta\Omega_1/\Delta\Omega$ . Таким образом, в достаточно широком диапазоне величин связи можно пользоваться упрощенным выражением (10). Однако в более общем случае при любых связях расчет следует вести по более точной формуле и определять  $S^2$  по (9).

Используя (8) и (9) и рис. 2, можно рассчитать значение естественной ширины линии трехконтурного генератора. Для реальных туннельных диодов с  $\omega = 2 \cdot 10^{10}$  рад·с<sup>-1</sup>,  $|Q_0| = 5$ ,  $I_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  А,  $d_1 = 10^{-2}$  Ом<sup>-1</sup>,  $d_2 = 3 \cdot 10^{-2}$  А·В<sup>-3</sup>

$$\Delta\Omega = 10^2 S^{-2} \text{ Гц,}$$

где  $S^2$  определяется из (9) или из рис. 2.

Оценим техническую нестабильность частоты трехконтурного генератора. При низких температурах основным дестабилизирующим фактором ГТД являются флуктуации напряжения питания ТД и уходы частоты стабилизирующего СПР.

Вариации напряжения источника питания в соответствии с (1) приводят к относительному изменению емкости I контура

$$\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{C_g}{4c_1 \left( \frac{\Phi}{u_0} - 1 \right)} \frac{\Delta u_0}{u_0}$$

Учитывая, что спектральная плотность флуктуаций напряжения типа  $1/f^\alpha$  на нагрузке практически для всех источников подчиняется закону  $S_u(\Omega) = \frac{A_u}{2\pi |\Omega|^\gamma}$ , находим выражение для спектральной плотности относительных флуктуаций емкости  $S_c = \frac{A_c}{2\pi |\Omega|^\gamma}$ . Здесь  $A_u$  и  $\gamma$  — коэффициенты, определяемые экспериментально.

Используя это соотношение и [3], получим выражение для технической ширины линии генерации туннельных диодов

$$\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_u = - \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\pi A_c \tau^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}} \tag{11}$$

где  $\Gamma(\gamma)$  — гамма-функция,  $S$  — коэффициент стабилизации,  $\tau$  — время наблюдения. Из (11) следует, что при параметрах

$$C_g = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}, C_1 \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}, \Phi = 1,4 \text{ В}, u_0 = 0,4 \text{ В},$$

$$A_s = 10^{-15}, \gamma = 1,5 \text{ и } S = 10^7$$

$$\frac{\Delta f}{f} \approx 5 \cdot 10^{-16} \sqrt[4]{\tau}$$

Уходы частоты стабилизирующего СПР зависят от вариаций реактивной составляющей поверхностного импеданса  $X_S$  и линейных размеров резонатора от температуры.

Относительное смещение частоты  $\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_X$  СПР, вызванное вариацией  $X_S$  с температурой, может быть получено на основании формул, описывающих поведение поверхностного импеданса  $Z_S$  от температуры и частоты [5]. В приближении  $\hbar\omega < \kappa T < \Delta$  величина

$$\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_X \approx - \frac{2\omega\mu_0}{3G} \delta(T) \frac{T_c}{T^2} e^{-1,76 T_c/T} \Delta T \tag{12}$$

Здесь  $\delta(T)$  — глубина проникновения поля в СП,  $T_c$  — критическая температура СП,  $G$  — геометрический фактор резонатора,  $\Delta T$  — нестабильность температуры СП.

Из (12) видно, что для уменьшения  $\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_X$  необходимо использовать СП с максимальным  $T_c$  и возможно меньшим  $\delta(T)$ . Например, для  $\text{NB}_3\text{Sn}$  при  $G = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$ ,  $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $T = 1,7 \text{ К}$  и  $\Delta T = 10^{-4} \text{ К}$

$$\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_X = 8 \cdot 10^{-16}$$

Сдвиг частоты стабилизирующего резонатора, обусловленный конечной величиной коэффициента линейного расширения материала  $\alpha_T$  при низких температурах, равен  $\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_{\alpha_T} = -\alpha_T \Delta T$  и для NB или

$NB_3Sn$  составляет  $\sim 5 \cdot 10^{-10}$ , что значительно превышает  $\frac{1}{\Delta T} \left( \frac{\Delta f}{f} \right)_x$ . Как было показано в [2],  $\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_{\alpha_T}$  можно существенно уменьшить, используя в качестве стабилизирующего СПР резонатор из синтетического сапфира ( $\alpha_T$  которого при  $1,7 \text{ К} \approx 3 \cdot 10^{-12}$ ), покрытый пленкой СП. В этом случае уходы частоты  $\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_{\alpha_T} \approx 3 \cdot 10^{-16}$  (при  $\Delta T = 10^{-4} \text{ К}$ ) становятся сравнимыми с  $\left( \frac{\Delta f}{f} \right)_x$ . Таким образом, уходы частоты стабилизирующего СПР на основе сапфира при  $\Delta T \approx 10^{-4} \text{ К}$  практически не влияют на стабильность генератора до относительных нестабильностей  $\Delta f/f \approx 10^{-15} \div 10^{-16}$ .

Результаты расчетов, приведенных в работе, показывают, что в трехконтурной системе стабилизации частоты естественная ширина линии генератора сужается по сравнению с одноконтурным в  $S^2$  раз. При этом в широком диапазоне параметров подсчет сужения линии может быть проведен по упрощенной формуле (10) без учета запаса регенерации и устойчивости режима системы. Учет влияния технической нестабильности частоты трехконтурного генератора на туннельном диоде с СПР на основе сапфира дает возможность реализовать долговременную нестабильность СВЧ-генераторов не хуже  $\Delta f/f \approx 10^{-15}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stien S. R. — In: Proc. of the 29<sup>th</sup> annual symp. on freq. contr. May 1975. New Jersey, 1975.
2. Брагинский В. Б., Минакова И. И., Панов В. И. — «Радиотехника и электроника», 1976, 21, № 1.
3. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., 1968.
4. Минакова И. И., Шапиро Е. Н. — «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1970, № 5.
5. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Халатников И. М. — ЖЭТФ, 1958, 35.

Поступила в редакцию  
18.4 1977 г.  
Кафедра  
физики колебаний