УДК 521.15; 521.61

Ю. В. Баркин

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС НА ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЕ (II)

Исследуется существование периодических решений в задаче о движении осесимметрического спутника относительно собственного центра масс на эволюционирующей круговой орбите. Движение спутника описывается каноническими оскулирующими элементами Андуайе, отнесенными к подвижной плоскости орбиты. Получены аналитические условия существования периодических решений Пуанкаре, порождающие решения которых интерпретируются как обобщенные законы Кассини для тел, обладающих осью динамической симметрии. Проведено качественное и численное исследование порождающих решений.

В 1693 г. Кассини описал вращательное движение Луны тремя законами [1]:

1. Луна вращается с запада на восток с постоянной угловой скоростью вокруг полярной оси, остающейся неподвижной в теле Луны, причем период вращения Луны относительно центра масс совпадает с периодом ее орбитального движения;

2. Плоскость экватора фигуры Луны наклонена на постоянный угол к плоскости эклиптики;

3. Узлы орбиты Луны и экватора ее фигуры на эклиптике совпадают, причем долгота нисходящего узла экватора равна долготе восходящего узла орбиты.

Законы Кассини впервые получили математическое обоснование в работах Лагранжа [2], а также в современных исследованиях резонансных вращательных движений небесных тел [3—6], в которых получили развитие и обобщение некоторые положения Кассини.

В связи с открытием резонанса во вращательном движении Меркурия и резонансов, подобных лунным, в движении некоторых спутников Юпитера, Сатурна и Марса особое значение приобретают исследования периодических движений небесных тел относительно центра масс. При этом, как показывают работы [3—6], следует учитывать основные эффекты в изменении орбиты центра инерции тела.

Естественно предположить, что законы Кассини могут быть обобщены на случай движения других небесных тел, вращение которых происходит в условиях резонанса, подобного лунному.

В настоящей работе рассматриваются периодические движения относительно центра масс спутника, обладающего осью динамической симметрии. Этот случай представляет самостоятельный интерес для исследования резонансных вращательных движений небесных тел, динамическое строение которых близко к осесимметрическому, а также для исследования резонансных вращений ИСЗ.

В работе получены аналитические условия существования периодических решений Пуанкаре в задаче о вращательном движении осесимметрического спутника относительно центра масс на круговой эволюционирующей орбите. Движение спутника описывается уравнениями в канонических оскулирующих элементах Андуайе, отнесенных к орбитальной плоскости. Проводится качественный и численный анализ порождающих решений Пуанкаре, которые интерпретируются как обобщенные законы Кассини для осесимметричных тел.

§ 1. Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим движение осесимметрического твердого спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов центрального тела O, относительно которого центр инерции S спутника описывает прецессирующую в пространстве круговую орбиту.

Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом в центральном теле O и с осями, сохраняющими постоянную ориентацию в пространстве; $Sxyz$ — система декартовых координат с началом в центре масс спутника S, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Oxyz$; $S\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника.

Предположим, что центр масс спутника описывает круговую орбиту, плоскость которой прецессирует с постоянной угловой скоростью k_Ω относительно оси Oz. При этом нормаль к плоскости орбиты образует постоянный угол i с осью Oz.

Поступательное движение спутника опишем координатами центра масс x, y, z, которые в рассматриваемом случае являются известными функциями времени:

$$\begin{aligned} x &= R(\cos M \cos \Omega - \sin M \sin \Omega \cos i), \\ y &= R(\cos M \sin \Omega + \sin M \cos \Omega \cos i), \\ z &= R \sin M \sin i, \end{aligned} \tag{1}$$

где R — радиус орбиты, $M = n \cdot t$ — средняя аномалия, отсчитываемая от линии узлов до радиус-вектора центра масс спутника, n — среднее орбитальное движение, $\Omega = k_\Omega t$ — возмущенная долгота восходящего узла, k_Ω — угловая скорость прецессии плоскости орбиты, i — постоянный угол наклона орбитальной плоскости к основной плоскости Oxy.

Вращательное движение спутника опишем каноническими оскулирующими элементами Андуайе [7] (рис. 1)

$$L,\ G,\ H,\ l,\ g,\ h, \tag{2}$$

где G — величина вектора $\mathbf{G}$ кинетического момента вращательного движения спутника, L — значение проекции вектора $\mathbf{G}$ на ось динамической симметрии спутника $S\zeta$, H — значение проекции вектора $\mathbf{G}$ на ось Oz, l — угол собственного вращения спутника, отсчитываемый от промежуточной плоскости $\mathbf{P}$, нормальной к вектору $\mathbf{G}$, g — долгота восходящего узла экваториальной плоскости спутника $S\xi\eta$ на промежуточной плоскости, h — долгота восходящего узла промежуточной плоскости на основной плоскости Oxy. Введем также в рассмотрение величины θ и ρ по формулам

$$\cos\theta = \frac{L}{G}, \quad \cos\rho = \frac{H}{G}.$$

Следовательно, θ — наклонность экватора спутника к промежуточной плоскости, ρ — наклонность плоскости $\mathbf{P}$ к основной плоскости Oxy.

Обозначим через m массу центрального тела, а через $A=B\neq C$ — главные центральные моменты инерции спутника.

Выберем за невозмущенное движение свободное вращательное движение спутника относительно центра масс и опишем его движение под действием гравитационных моментов центрального тела уравнениями в элементах Андуайе (2). Будем иметь [7]

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},$$
$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G},\qquad (3)$$
$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h},\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H},$$

где

$$F=-\frac{G^2}{2A}-\frac{A-C}{2AC}L^2+U,\qquad (4)$$

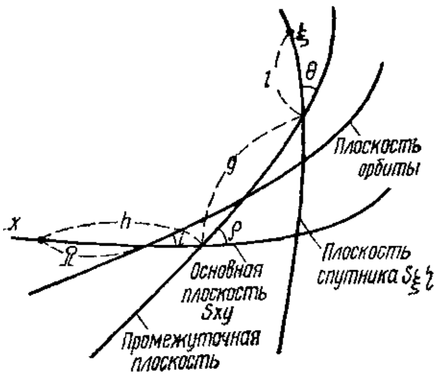

Рис. 1. Элементы Андуайе, отнесенные к основной плоскости

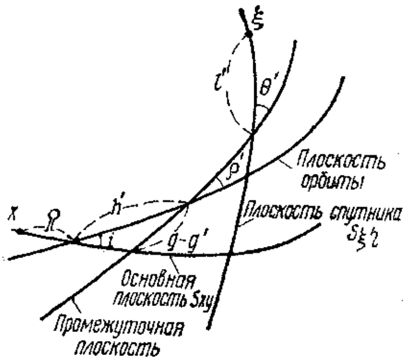

Рис. 2. Элементы Андуайе, отнесенные к движущейся плоскости орбиты

U — силовая функция ньютоновского взаимодействия спутника с центральным телом. В дальнейшем в работе будет использоваться приближенное значение функции U, определяемое формулой

$$U=k\gamma^2,$$

где

$$k=\frac{3}{2}\frac{fm}{R^3}(A-C)$$

постоянный динамический параметр, f — гравитационная постоянная,

$$\gamma=a_{13}\frac{x}{R}+a_{23}\frac{y}{R}+a_{33}\frac{z}{R}\qquad (5)$$

косинус угла, измеряемого между радиус-вектором центра масс спутника и его осью динамической симметрии $S\zeta$, a_{ij} — направляющие косинусы оси симметрии спутника в осях $Sxyz$, представляются функциями элементов (2) с помощью формул:

$$
\begin{aligned}
a_{13} &= (\cos g \sin\theta \cos\rho + \sin\rho \cos\theta)\sin h + \cos h \sin g \sin\theta,\\
a_{23} &= -(\cos g \sin\theta \cos\rho + \sin\rho\cos\theta)\cos h + \sin h \sin g \sin\theta,\\
a_{33} &= -\sin\rho \sin\theta \cos g + \cos\theta\cos\rho.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Так как координаты x, y, z посредством M и Ω зависят известным образом от времени (1), то силовая функция (5) с помощью формул невозмущенного движения (6) представляется явной функцией элементов Андуайе и времени t.

Исследование задачи непосредственно в переменных (2) связано с большим количеством выкладок. Чтобы устранить этот недостаток, введем новые канонические элементы Андуайе

$$L',\ G',\ H',\ l',\ g',\ h', \tag{7}$$

но отнесенные к движущейся плоскости орбиты (рис. 2).

Обобщая результаты работы [8], преобразуем уравнения вращательного движения (3) к переменным (7). Будем иметь

$$
\begin{aligned}
\frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial L'},\\
\frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial G'},\\
\frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial H'},
\end{aligned} \tag{8}
$$

где

$$F' = F + k_{\Omega}\left[H'\cos i - \sqrt{G'^2 - H'^2}\sin i \cos h'\right]. \tag{9}$$

В правых частях уравнений (8) F должна быть представлена функцией элементов (7). Опуская для краткости изложения формулы канонического преобразования от элементов (2) к переменным (7), запишем окончательное выражение функции F:

$$F = -\frac{G'^2}{2A} - \frac{A-C}{2AC}L'^2 + k\gamma^2, \tag{10}$$

где

$$\gamma = \sin\sigma(\cos g' \sin\theta' \cos\rho' + \sin\rho'\cos\theta') + \cos\sigma \sin\theta' \sin g', \tag{11}$$

$$\sigma = h' - M,\ L' = G'\cos\theta',\ H' = G'\cos\rho'.$$

Теперь для силовой функции задачи нетрудно получить следующее тригонометрическое представление:

$$U = k\Sigma\, \gamma_{k_1,k_2}(\theta', \rho')\cos(k_1 g' + k_2\sigma), \tag{12}$$

где суммирование производится по индексам $k=0,\ 1,\ 2$; $k_2=0,\ \pm 2$, а коэффициенты γ_{k_1,k_2} определяются формулами:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0.0} &= \frac{1}{2}\sin^2\theta' + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta'\right)\sin^2\rho',\\
\gamma_{1.0} &= \frac{1}{4}\sin 2\rho' \sin 2\theta',\\
\gamma_{2.0} &= -\frac{1}{4}\sin^2\theta' \sin^2\rho',
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$\gamma_{0.2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta'\right)\sin^2\rho',$$

$$\gamma_{2.\pm 2} = -\frac{1}{8}\sin^2\theta'(1 \pm \cos\rho')^2,$$

$$\gamma_{1.\pm 2} = \mp\frac{1}{4}\sin 2\theta' \sin\rho'(1 \pm \cos\rho').$$

Сделаем еще одно каноническое преобразование: $H'' = H'$, $h'' = \sigma$. Используя первый интеграл $L' = L_0$, который допускают уравнения (8), понизим порядок уравнений движения на две единицы.

В результате будем иметь

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial g'}, \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial G'}, \tag{14}$$

$$\frac{dH''}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial h''}, \quad \frac{dh''}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial H''},$$

где

$$F' = -\frac{G'^2}{2A} + nH'' + k_\Omega [H''\cos i - \sqrt{G'^2 - H''^2}\sin i \cos(h'' + M)] + k\gamma^2, \tag{15}$$

$$\gamma^2 = \Sigma\gamma_{k_1,k_2}\left(\frac{H''}{G'}, \frac{L_0}{G'}\right)\cos(k_1 g' + k_2 h'').$$

После интегрирования уравнений (14) переменные L', l' определяются простыми формулами

$$L' = L_0, \quad l' - l_0 = -\int_{t_0}^{t}\frac{\partial F'}{\partial L'}dt + \frac{A-C}{AC}L_0(t - t_0), \tag{16}$$

где L_0, l_0 — значения соответствующих переменных на момент времени $t = t_0$.

Предположим, что тело мало отличается от сферического и орбита медленно меняет свое положение в пространстве. Тогда характеристическая функция задачи представляется в виде, необходимом для применения метода малого параметра Пуанкаре [9]:

$$F' = F_0 + \nu F_1, \tag{17}$$

где

$$F_0 = -\frac{G'^2}{2A} + nH'', \tag{18}$$

$$\nu F_1 = k_\Omega [H''\cos i - \sqrt{G'^2 - H''^2}\sin i \cos(h'' + M)] + k\gamma^2. \tag{19}$$

В качестве параметра ν можно выбрать величину

$$\nu = \max\left\{\left|\frac{k_\Omega}{n}\right|, \frac{|A - C|}{A}\right\}.$$

§ 2. Порождающие периодические решения Пуанкаре как обобщенные законы Кассини

Для исследования существования периодических решений уравнений (14) воспользуемся методом малого параметра Пуанкаре для гамильтоновых систем [9].

При $\nu=0$ получаем общее решение уравнений (14):

$$G' = G_0, \quad H'' = H_0, \tag{20}$$
$$g' = n_1^{(0)}t + g_0, \quad h'' = -nt + h_0,$$

где G_0, H_0, g_0, h_0 — произвольные постоянные интегрирования, $n_1^{(0)} = \frac{G_0}{A}$ — угловая скорость вращательного движения спутника относительно вектора $\mathbf{G}$, n — среднее орбитальное движение. Решение (20), соответствующее невозмущенному движению спутника относительно подвижной плоскости орбиты, является периодическим, как только угловые скорости $n_1^{(0)}$ и n соизмеримы, т. е. $\bar{k}n = \bar{k}_1 n_1^{(0)}$, где $\bar{k}$, $\bar{k}_1$ — целые числа (показатели соизмеримости). Примем это решение за порождающее периодическое решение периода $T_0 = \frac{2\pi\bar{k}}{n_1^{(0)}} = \frac{2\pi\bar{k}_1}{n}$.

Согласно теории периодических решений Пуанкаре [9] уравнения (14) допускают периодические решения периода T_0 при малых значениях параметра ν, если соответствующие порождающие решения удовлетворяют следующей группе аналитических условий:

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial G_0^2} \neq 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial g_0} = \frac{\partial [F_1]}{\partial h_0} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial H_0} = 0, \tag{23}$$

$$H([F_1])\Big|_{\substack{g_0\\h_0\\H_0}} \neq 0, \tag{24}$$

где

$$[F_1] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} F_1(G_0, H_0, g_0 + n_1^{(0)}t, \ h_0 - nt, \ nt)\,dt. \tag{25}$$

Условие (21) выполняется для любого порождающего решения, так как

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial G_0^2} = -\frac{1}{A} \neq 0.$$

Прежде чем записать в явной форме условия существования (22)—(25), вычислим усредненное значение $[F_1]$. Будем иметь

$$\nu[F_1] = k_\Omega[H_0\cos i - \sqrt{G_0^2 - H_0^2}\sin i\cos h_0] +$$
$$+ k\{\gamma_{0.0}(\theta', \rho') + \gamma_{1.\pm 2}(\theta', \rho')\cos(g_0 \pm 2h_0)\} \tag{26}$$

в случае соизмеримости $\bar{k}:\bar{k}_1=2:\pm 1$ и

$$\nu[F_1]=k_\Omega[H_0\cos i-\sqrt{G_0^2-H_0^2}\sin i\cos h_0]+$$
$$+k\{\gamma_{0.0}(\theta',\rho')+\gamma_{2.\pm 2}(\theta',\rho')\cos 2(g_0\pm h_0)\}. \qquad (27)$$

в случае соизмеримости $\bar{k}:\bar{k}_1=1:\pm 1$. Коэффициенты $\gamma_{0.0}$, $\gamma_{1.\pm 2}$, $\gamma_{2.\pm 2}$ определяются формулами (13), в которых нужно положить

$$\cos\theta'=\frac{L_0}{G_0},\ \cos\rho'=\frac{H_0}{G_0}.$$

Практический интерес составляет рассмотрение соизмеримости $\bar{k}:\bar{k}_1=1:1$, которая соответствует реальному движению Луны и некоторых спутников Марса, Юпитера и Сатурна. Поэтому последующие рассуждения мы проведем для этого случая.

Подставляя выражение (27) в условия существования (22), запишем их в явной форме:

$$k_\Omega\sin i\sqrt{G_0^2-H_0^2}\sin h_0+2k\gamma_{2.2}(\theta',\rho')\sin 2(g_0+h_0)=0,$$
$$\gamma_{2.2}(\theta',\rho')\sin 2(g_0+h_0)=0. \qquad (28)$$

Уравнения (28) имеют решение

$$h_0=0,\pi;\ g_0=0,\ \frac{\pi}{2},\pi,\ \frac{3}{2}\pi, \qquad (29)$$

которое означает, что восходящий узел орбиты на основной плоскости совпадает с восходящим или с нисходящим узлом промежуточной плоскости **P** и что в момент прохождения спутником узла орбиты проекция его оси динамической симметрии на плоскость орбиты образует углы 0, $\pi/2$, π, $^3/_2\pi$ с линией узлов. Перечисленные факты обобщают соответствующие положения третьего закона Кассини.

Условие (23) удобнее записать относительно переменной ρ'. Будем иметь

$$\frac{1}{\sin\rho'}\frac{\partial[F_1]}{\partial\rho'}=0. \qquad (30)$$

Введем в рассмотрение динамическую характеристику спутника

$$\delta=\frac{3}{2}\frac{A-C}{A}\frac{n}{k_\Omega}.$$

Тогда уравнение (30) нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\delta=\frac{4\sin(\rho'+\sigma_1 i)}{(2-3\sin^2\theta')\sin 2\rho'+\sigma_2\sin^2\theta'(1+\cos\rho')\sin\rho'}, \qquad (31)$$

где

$$\sigma_1=\cos h_0=\pm 1,\ \sigma_2=\cos 2(g_0+h_0)=\pm 1.$$

Таким образом, уравнение (31) дает зависимость между порождающими значениями двух переменных θ' и ρ' и двух параметров задачи δ и i при порождающих значениях угловых элементов (29), соответствующих значениям $\sigma_1=\pm 1$, $\sigma_2=\pm 1$.

Решения (29) и (31) описывают периодические движения более общего характера, чем движения по Кассини. Однако это справедливо лишь для тел, обладающих осью динамической симметрии.

Мы удовлетворим третьему закону Кассини, если положим $\theta'=\pi/2$. При этом уравнение (31) запишется в более коротком виде:

$$\delta=\frac{4\sin(\rho'+\sigma_1 i)}{-\sin 2\rho'+\sigma_2(1+\cos\rho')\sin\rho'}. \tag{32}$$

Последнее равенство соответствует второму закону Кассини. На рис. 3, рис. 4 приведены графические зависимости $\delta(\rho)$ для значений наклонности орбиты $i=1°,8$; $5°$; $8°$.

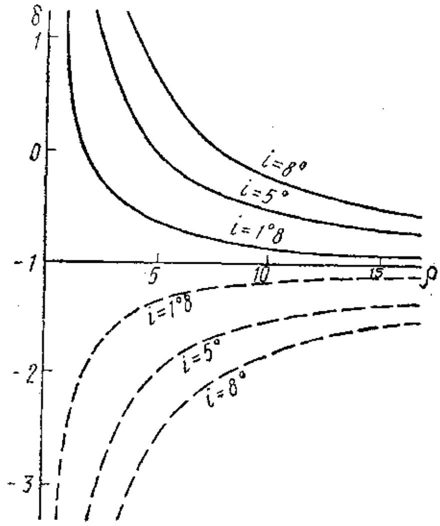

Рис. 3. Порождающие значения δ, ρ (пунктир при $\sigma_1=1$ и $\sigma_2=-1$, сплошная при $\sigma_1=-1$ и $\sigma_2=-1$)

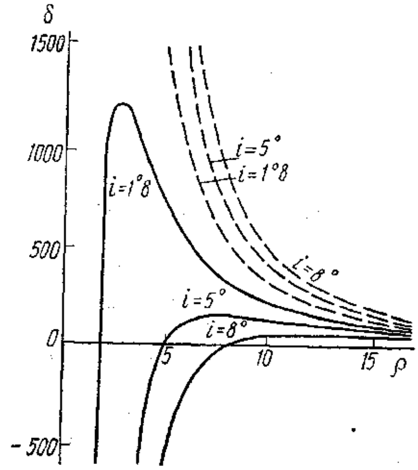

Рис. 4. Порождающие значения δ, ρ (пунктир при $\sigma_1=1$ и $\sigma_2=1$, сплошная при $\sigma_1=1$ и $\sigma_2=1$)

После несложных преобразований условие существования (24) можно записать в следующем виде:

$$\gamma_{2.2}\left\{\frac{\partial^2\gamma_{0.0}}{\partial\rho'^2}+\sigma_2\frac{\partial^2\gamma_{2.2}}{\partial\rho'^2}-\delta\cos(\rho'+\sigma_1 i)\right\}\neq 0. \tag{33}$$

Таким образом, условие (33) выполняется для всех порождающих решений, определяемых формулами (29), (31), за исключением точки $\rho'=\pi$.

Мы показали, что в задаче о вращательном движении осесимметричного спутника на эволюционирующей круговой орбите существует четырехпараметрическое семейство периодических решений Пуанкаре. В порождающем решении произвольно выбираются: G_0 — величина вектора кинетического момента вращательного движения спутника, θ' — наклонность плоскости спутника $S\xi\eta$ к промежуточной плоскости, ρ' — наклонность промежуточной плоскости и наклонность плоскости орбиты i.

Порождающие решения определяются формулами (29), (31), которые интерпретируются в работе как обобщенные законы Кассини для осесимметричных тел. Эти формулы позволяют в случае синхронных вращательных движений небесных тел по известным орбитальным характеристикам k_Ω, i и динамическому сжатию спутника $A-C/A$ определить положение оси вращения спутника в орбитальной системе координат.

Суммируя вышеизложенные результаты, мы можем сформулировать окончательный вывод: обобщенные движения, по Кассини, соответствуют порождающим периодическим решениям Пуанкаре, и, следовательно, реальное движение тел более точно описывается периодическими решениями Пуанкаре, существование которых доказано в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cassini G. D. Traite de lorigine et du progres de lastronomie. Paris, 1963.
2. Lagrange J. L. Mem. Acad. Berlin., in «Occovers de Lagrange» ed. J. H. Serret, vol. 5. Gauthiers—Villars. Paris, 1780.
3. Colombo G. — «Astron. J.», 1966, 71, 891.
4. Peal S .T. — «Astron. J.», 1969, 74, 483.
5. Белецкий В. В. О законах Кассини. Препринт № 79. Инст. прикл. матем. АН СССР, 1971.
6. Лидов М. Л., Нейтштадт А. И. Метод канонических преобразований в задачах о вращении небесных тел и законы Кассини. Препринт № 9. Инст. прикл. матем. АН СССР, 1973.
7. Andoyer H. Mecanique Celeste, T. I, Gauthier—Villars. Paris, 1923.
8. Kinoshyta H., Kozai V. — «Publ. Astron. Soc. Japan.», 1971, 25, 393.
9. Пуанкаре А. Избранные труды. М., 1971.

Поступила в редакцию
6.6 1976 г.
Кафедра
небесной механики
и гравиметрии