

УДК 532.14.3:53.51

В. П. Кандидов
С. А. ХристочевскийАНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
В ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается возможность применения метода конечных элементов для расчета вынужденных и свободных колебаний оболочки в жидкости. В матричной форме получены силы давления жидкости на оболочку при аппроксимации плотности простых источников на поверхности оболочки полиномом первой степени. Приведен численный расчет для конкретной оболочки и определены резонансные частоты оболочки в жидкости.

Влияние жидкости на упругие колебания цилиндрической поверхности сводится к появлению присоединенной массы и сопротивления излучения [1]. В результате колебания тела становятся затухающими, смещаются их собственные частоты. Величины этих эффектов существенно зависят от соотношений между размерами цилиндра и длинами волн на его поверхности и в жидкости. Исследование задачи о колебаниях и изучении упругого цилиндра конечной длины возможно приближенными методами [2]. В настоящей работе рассматривается возможность применения метода конечных элементов (МКЭ) для расчета гармонических колебаний тонкой цилиндрической оболочки, помещенной в идеальную жидкость. Оболочка дополнена до бесконечной абсолютно жестким цилиндрическим экраном.

1. Потенциал скоростей возмущения $\Phi(r, z, \theta)$ в жидкости удовлетворяет уравнению Кирхгоффа, а на поверхности — условию безотрывности движения жидкости

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right|_{r=a} = -v(z, \theta), \quad (1)$$

где n_1 — нормаль к поверхности оболочки, $v(z, \theta)$ — нормальная составляющая амплитуды скорости колебаний поверхности, a — радиус оболочки.

В этом случае $\Phi(r, z, \theta)$ можно представить в виде потенциала простых источников, распределенных по поверхности оболочки [3]

$$\Phi(r, z, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} ad\varphi \frac{e^{ikR}}{R} \gamma(\xi, \varphi), \quad (2)$$

где $\gamma(\xi, \varphi)$ — плотность простых источников; r, z, θ — координаты точки наблюдения, $R=R(r, z, \xi, \theta, \varphi)$ — расстояние от точки наблюдения до точки на поверхности оболочки, ω — частота колебаний, c — скорость звука в жидкости, $k=\omega/c$.

Для определения плотности источников $\gamma(\xi, \varphi)$ используется условие (1) с учетом свойств потенциала простого слоя [4].

$$v(z, \theta) = -2\pi\gamma(z, \theta) + \iint \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \gamma(\zeta, \varphi) d\zeta d\varphi. \quad (3)$$

По известному потенциалу Φ давление на поверхности определяется формулой

$$p(z, \theta) = -i\omega\rho\Phi(r, z, \theta)|_{r=a}, \quad (4)$$

где ρ — плотность жидкости.

Полная формулировка задачи динамики упругой оболочки в жидкости включает уравнения (2), (3), (4) и систему трех дифференциаль-

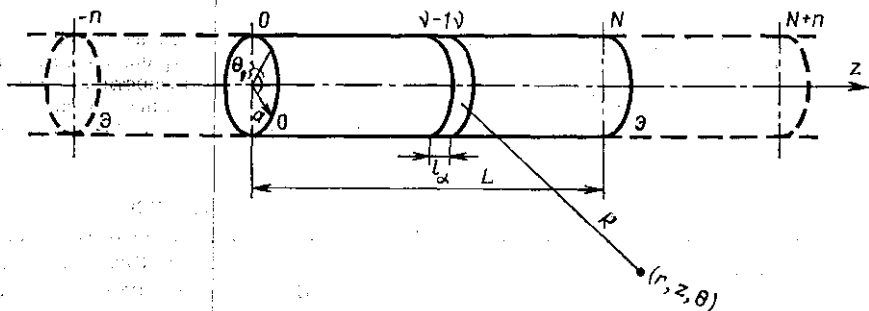


Рис. 1

ных уравнений в частных производных, описывающих колебания оболочки:

$$L_W(W, U, V) = p(z, \theta) + f(z, \theta), \quad (5)$$

$$L_U(W, U, V) = 0,$$

$$L_V(W, U, V) = 0.$$

Здесь W, U, V — амплитуда гармонических колебаний оболочки по осям r, z, θ соответственно, $L_{U, V, W}$ — дифференциальные операторы, конкретный вид которых зависит от принятых приближений в описании деформаций оболочки. В данном случае используется техническая теория Власова [5], f — амплитуда распределенной вынуждающей силы. Пусть

$$f = F(z) \exp\{im\theta\}. \quad (6)$$

Тогда все величины $v, \Phi, \gamma, p, W, U, V$ пропорциональны $\exp\{im\theta\}$.

2. Для решения поставленной задачи оболочку и прилегающие к ней части экрана разобьем на $N+2n$ круговых цилиндрических конечных элементов (КЭ) длины l_α с боковой поверхностью S_α (рис. 1). Окружности, ограничивающие элементы, назовем «узлами» и присвоим им номера v ($v = -n, \dots, N+n$). Пусть узлы с номерами $v=0, \dots, N$ принадлежат оболочке. Согласно МКЭ функции смещения W, U, V на отдельном элементе аппроксимируем линейной формой конечного числа наперед выбранных базисных функций [6]. Коэффициенты этой формы выражаются через смещения в узлах. Например, поперечное смещение W элемента с номером α представляется в виде

$$W_{\alpha}(\xi) = \psi^T(\xi) C_{\alpha} W. \quad (7)$$

Здесь ξ — локальная координата элемента, $\psi^T(\xi)$ — строка базисных функций; W — вектор, координатами которого являются значения функции поперечного смещения $W(z)$ и ее производной $\frac{\partial W}{\partial z}$, взятые в уз-

лах модели, т. е. $W^T = \left\{ W_0, \dots, W_N, \frac{\partial W_0}{\partial z}, \dots, \frac{\partial W_N}{\partial z} \right\}$; C_{α} — матрица, коэффициенты которой легко найти [7]. В качестве базисных функций возьмем

$$\psi^T(\xi) = \{\xi^j\}; \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (8)$$

Тогда форма колебаний оболочки, составленной из КЭ, однозначно определяется вектором обобщенных координат

$$q^T = \{W^T, U^T, V^T\}. \quad (9)$$

Здесь векторы U, V имеют вид, аналогичный W . Далее, применяя принцип виртуальных перемещений к системе (5) и используя введенную аппроксимацию функций смещения, получаем уравнение движения оболочки в матричном виде [7]

$$M\ddot{q} + Kq = P + F. \quad (10)$$

Здесь M и K — матрицы масс и жесткости модели оболочки из КЭ. Матрицы квадратные, их вид определяется выбранной системой базисных функций ψ ; P, F — векторы обобщенных сил давления жидкости и внешнего воздействия. Алгоритм вычисления векторов P и F по известным нагрузкам p и f , а также вычисления матриц M и K изложен подробно в [6, 7]. Основную трудность в поставленной задаче представляет вычисление давления жидкости p на поверхности упругой оболочки.

3. Для определения p из системы уравнений (2), (3), (4) воспользуемся принципами МКЭ. Представим плотность простых источников на α -том КЭ оболочки и экрана с помощью укороченной системы базисных функций ψ_1 , положив в (8) $j=0, 1$:

$$\gamma_{\alpha}(\xi) = -i\omega\psi_1^T(\xi) A_{\alpha} W. \quad (11)$$

Здесь A_{α} — неизвестная матрица.

Подставим (11) в (2) и запишем потенциал Φ в виде суммы потенциалов от отдельных элементов

$$\Phi(r, z) = -i\omega \sum_{\alpha=-n}^{N+n} E_{\alpha}^T(r, z) A_{\alpha} W. \quad (12)$$

Строка E_{α}^T определяет влияние α -го элемента на потенциал возмущения в точке (r, z) , ее элементы вычисляются по формуле

$$E_{\alpha}^j(r, z) = a \iint_{S_{\alpha}} \xi^j \frac{e^{ikR}}{R} \cos m\varphi d\xi d\varphi; \quad j = 0, 1. \quad (13)$$

Для определения матриц A наложим условие непрерывности плотности источников во внутренних узлах оболочки и экрана

$$\gamma_{\alpha}(l_{\alpha}) = \gamma_{\alpha+1}(0); \quad \alpha \neq -n, 0; N; N+n. \quad (14)$$

Кроме того, воспользуемся условием безотрывности движения (3), выполнения которого потребуем в узлах модели

$$v(z_v) = -i\omega \sum_{\alpha=-n}^{N+n} \mathcal{E}_\alpha^T(z_v) A_\alpha W - 2\pi\gamma(z_v); \quad v \neq 0, N, \quad (15)$$

где элементы \mathcal{E}_α^T равны

$$\mathcal{E}_\alpha^i(z_v) = a^2 \iint_{S_\alpha} \xi^i \frac{e^{ikR}}{R_a^3} (ikR_a - 1) (1 - \cos \varphi) \cos m\varphi d\varphi d\xi,$$

$$R_\alpha = \sqrt{(z - z_v)^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)}.$$

При этом для узлов, ограничивающих оболочку, записываются два выражения типа (15) с учетом того, что скорость v терпит разрыв на границе оболочки и экрана.

Решая систему $2(N+2n+1)$ -комплексных алгебраических уравнений (14) и (15), найдем элементы матриц A_α . Подставляя A_α в (12) и используя (4), можно вычислить давление при движении оболочки. На поверхности оболочки, в частности, давление в узлах равно

$$p(a, z_v) = -\omega^2 \sum_{\alpha=-n}^{N+n} E_\alpha^T(a, z_v) A_\alpha W. \quad (16)$$

Вычисление $p(a, z)$ связано с большими затратами машинного времени. Поэтому при определении вектора \mathbf{P} использована линейная аппроксимация давления на элементе по известным давлениям в узлах $p(a, z_v)$.

Заметим, что давление, потенциал и плотность источников являются комплексными величинами.

Окончательно вектор \mathbf{P} удобно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P} = -\omega^2 (D + iB) \mathbf{q}, \quad (17)$$

где D — матрица присоединенных масс модели оболочки, B — матрица излучения. После подстановки (17) в (10) получим уравнение вынужденных гармонических колебаний оболочки в жидкости

$$K\mathbf{q} - \omega^2 (M + D) \mathbf{q} - i\omega^2 E\mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (18)$$

Вычисление элементов матрицы A и решение системы проводилось на ЦВМ БЭСМ-4 и М-400 с помощью специальных программ, позволяющих рассматривать модели до 20 элементов. Основные затраты машинного времени связаны с вычислением интегралов (13) и (15). Последний имеет особенность в точке $\xi = z_v$ и $\varphi = 0$, и при численном интегрировании по формуле Филона исключалась окрестность этой точки порядка $10^{-3}S_\alpha$. Для уменьшения порядка матричного уравнения (18) совершалась редукция [8], при которой использовалась укороченная система базисных функций Ψ_1 для образования матрицы масс M . В результате на каждый узел модели приходится по три динамических координаты U_v, V_v, W_v [6].

4. В качестве примера была рассмотрена оболочка со следующими параметрами $L/a = 4,5$, $h/a = 0,035$, $\mu = 0,3$, $\rho_0/\rho = 7,7$; здесь μ — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, ρ_0 — плотность материала оболочки.

Для оценки влияния экрана рассмотрены гармонические колебания оболочки при заданных распределениях скорости на поверхности оболочки $v(z, \varphi) = A(z) \cos m\varphi$. При этом экран считался ограниченным и на нем располагалось конечное число элементов. На рис. 2 и 3 приведено распределение модуля плотности источников в модели, у которой по 8 элементов лежат на экране и на оболочке. Сплошной линией изображена $\gamma(z)$ для $kL=4,0$ и штриховой — при $kL=8,0$. Величина $m=0,1$ указана у кривых. Видно, что плотность источников на экране быстро и монотонно убывает с удалением от края оболочки.

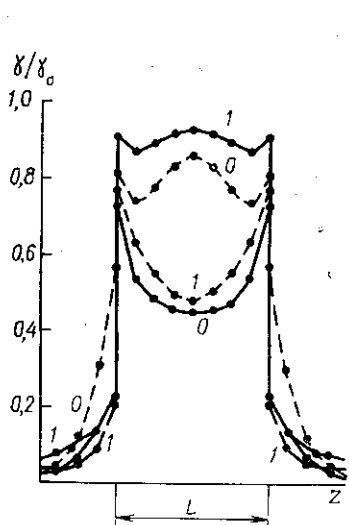


Рис. 2

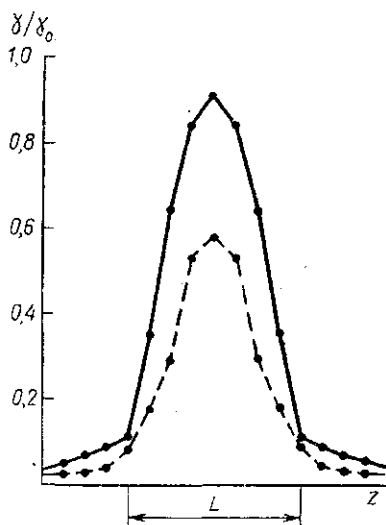


Рис. 3

Это позволяет ограничиться рассмотрением элементов экрана длиной $L/2$. При $n=2-6$. На рис. 2 $A(z) = \text{const}$, на рис. 3 $A(z) \sim \sin \pi z/L$.

Далее рассмотрены вынужденные колебания оболочки под действием гармонической силы, приложенной в центральном узле для случая $m=1$. При этом края оболочки были свободно оперты. Как показали расчеты, амплитуда колебаний оболочки имеет характерную резонансную зависимость на частоте $\omega = 0,0830 \omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{Eg/\rho_0 (1 - \mu^2)} a^2$ (E — модуль Юнга). Поскольку следующая резонансная частота $\omega_2 \gg \omega_1$, можно оценить добротность системы $Q \approx 29,8$.

5. Изложенный выше метод вообще применим только к гармоническим колебаниям. Однако для добротных систем им можно воспользоваться для приближенного анализа свободных затухающих колебаний. С этой целью были рассчитаны собственные колебания в жидкостной опертой оболочке. В этом случае частота собственных колебаний неизвестна и для ее определения берется метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения приводится оценка $\omega^{(0)}$, полученная в [8]. Затем определялись элементы матриц $D^{(0)}$ и $B^{(0)}$ и решалась собственная задача. Полученное в результате собственное значение $\omega^{(1)}$ — комплексное, действительная его часть используется для вычисления $D^{(1)}$ и $B^{(1)}$ и т. д. Как показала практика, процесс быстро сходится.

Приближение	0	1	2	3
$\omega^{(i)}/\omega_0$	0,0960	0,0824	0,0833	0,0833

В таблице приведено несколько приближений для первого тона поперечных колебаний.

Действительная часть $\omega^{(2)}$ отлична от резонансной частоты не более чем на 0,5%, а мнимая определяет добротность системы $Q_1=28,3$. Модуль формы $|q_1|$ практически совпадает с $\sin \pi z/L$, а сдвиг фаз между колебаниями узлов близок к нулю.

Полученные результаты показывают, что МКЭ применим для расчета динамики оболочек в жидкости. Последовательное применение МКЭ позволяет, по-видимому, исследовать задачу о колебаниях и излучении цилиндрической поверхности конечной длины с упругими торцами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., 1972.
2. Скучик Е. Основы акустики, т. 2. М., 1976.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М., 1947.
4. Фешбах Г., Морз Ф. М. Методы теоретической физики. М., 1958.
5. Власов В. З. Избранные труды, т. I. М., 1962.
6. Кандидов В. П., Христочевский С. А. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1976, 17, № 1, 39—43.
7. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
8. Vysloukh V. A., Kandidov V. P., Chesnokov S. S. «Int. J. Num. Meth. in Engng.», 1973, 7, 185—194.
9. Кито Ф. «Дзосэн кекай ромбунсю», 1957, № 101.

Поступила в редакцию
16.9 1977 г.
Кафедра
общей физики для мехмата