УДК 621.372.221

В. А. Давыдов

ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА В СЛУЧАЕ ДВУХ СКАЧКОВ ВО ВРЕМЕНИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Получено выражение для интенсивности излучения равномерно движущегося заряда в случае двойного скачка во времени диэлектрической проницаемости среды. Рассмотрены предельные случаи.

В 1973 г. В. Л. Гинзбург [1] рассчитал излучение равномерно движущегося заряда в случае скачкообразного изменения во времени диэлектрической проницаемости ε. Более подробное рассмотрение этого явления было дано В. Л. Гинзбургом и В. Н. Цитовичем [2].

В настоящей работе вычислено излучение равномерно движущегося заряда в случае, когда диэлектрическая проницаемость среды в момент времени $t=0$ мгновенно меняется от ε_1 до ε_2, а затем в момент $t=t_0$ — от ε_2 до ε_3. Задача эта представляет интерес, поскольку в ней присутствует параметр t_0, характеризующий время изменения диэлектрической проницаемости среды от ε_1 до ε_3. Поскольку все реальные процессы изменения ε не происходят скачкообразно, а требуют некоторого времени, то наша постановка задачи представляется более близкой к реальности.

Найдем вначале явную зависимость от координат и времени полей, возникающих в случае одного мгновенного скачка диэлектрической проницаемости от ε_1 до ε_2. Как было показано в работе [3], Фурье-компоненты векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля до скачка диэлектрической проницаемости, описывавшиеся выражениями

$$\mathbf{A}^0_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega_1 t)} \text{ и } \varphi^0_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega_1 t)}, \tag{1}$$

после скачка будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega_2 t)} + \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{kr}+\omega_2 t)},$$

и

$$\varphi^1_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega_2 t)} + \varphi^2_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{kr}+\omega_2 t)}; \tag{2}$$

где

$$\mathbf{A}^{1,2}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^0_{\mathbf{k}\omega}\left(1 \pm \frac{\varepsilon_1\omega_1}{\varepsilon_2\omega_2}\right),$$

$$\varphi^{1,2}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2}\varphi^0_{\mathbf{k}\omega}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \pm \frac{\varepsilon_1\omega_1}{\varepsilon_2\omega_2}\right). \tag{3}$$

Здесь ω_2 — неопределенная величина, которая определяется при последующем интегрировании Фурье-гармоник по частоте. В выражениях (3) плюс относится к $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}\omega}$ и к $\varphi^1_{\mathbf{k}\omega}$, а минус к $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}\omega}$ и к $\varphi^2_{\mathbf{k}\omega}$. Как и в работах [3, 4], представим равномерное движение заряда следующим образом. Пусть заряд q движется равномерно со скоростью V вдоль оси x и резко останавливается в момент скачка ($t=0$) в начале координат. Затем, сразу же после скачка, заряд мгновенно ускоряется и движется далее в среде с ε_2 с той же скоростью V. Излучение после скачка состоит из двух слагаемых. Первое связано с полубесконечным движением в среде с ε_1. В момент скачка это излучение согласно формулам (3) трансформируется. Второе слагаемое дает излучение, связанное с полубесконечным движением заряда после скачка в среде с ε_2.

Приведем выражение для Фурье-гармоники вектор-потенциала $\mathbf{A}_{k\omega}$, полученное в работе [3] (выражение для скалярного потенциала $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ аналогично):

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = i\frac{4\pi q\mathbf{V}}{c(2\pi)^4}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_1\omega_1}{\varepsilon_2\omega_2}\right)\frac{e^{-i\omega_2 t}}{(\omega_1-\mathbf{kV}-i\gamma)\left(k^2-\frac{\varepsilon_1\omega_1^2}{c^2}\right)}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_1\omega_1}{\varepsilon_2\omega_2}\right)\frac{e^{+i\omega_2 t}}{(\omega_1-\mathbf{kV}-i\gamma)\left(k^2-\frac{\varepsilon_1\omega_1^2}{c^2}\right)}+$$
$$\left.+\frac{e^{-i\omega_1 t}}{(\omega_1-\mathbf{kV}+i\gamma)\left(k^2-\frac{\varepsilon_2\omega_1^2}{c^2}\right)}\right]e^{i\mathbf{kr}}. \quad (4)$$

Здесь γ — бесконечно малая положительная величина.

Интегрирование выражения (4) по частоте ω_1 и волновому вектору $\mathbf{k}$ полностью аналогично интегрированию, проведенному в работе [3], с той лишь разницей, что мы теперь рассматриваем нечеренковский случай — $V<c/\sqrt{\varepsilon_1}$, следовательно, в подинтегральном выражении отсутствует полюс, соответствующий «черенковскому» заряду. Поэтому приведем лишь окончательный результат для напряженности электрического поля. Пусть после скачка диэлектрической проницаемости прошло время t. Тогда все пространство оказывается разделенным на две области.

Область 1: $r>\frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, где r — радиус-вектор, проведенный из начала координат.

В этой области электрическое поле описывается следующим выражением:

$$\mathbf{E}_1=\frac{\gamma_1^2 q}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\right)\mathbf{R}_1}{\left[\left(x-V\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}t\right)^2+\gamma_1^2(z^2+y^2)\right]^{3/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\right)\mathbf{R}_2}{\left[\left(x+V\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}t\right)^2+\gamma_1^2(z^2+y^2)\right]^{3/2}}\right), \quad (5)$$

где

$$\gamma_1^2=1-\beta^2\varepsilon_1, \quad \beta=\frac{V}{c},$$

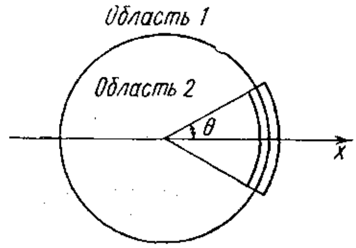
$$\mathbf{R}_1 = \left(x - V\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,t, y, z\right),$$

$$\mathbf{R}_2 = \left(x + V\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,t, y, z\right).$$

Область 2: $r < \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}$.

В этой области имеется поле равномерно движущегося со скоростью V заряда:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\gamma_2^2 q \mathbf{R}_3}{[(x - Vt)^2 + \gamma_2^2 (z^2 + y^2)]^{3/2}}, \quad (6)$$



где

$$\gamma_2^2 = 1 - \beta^2 \varepsilon_2,$$

$$\mathbf{R}_3 = (x - Vt, y, z).$$

Для того чтобы найти поле на сфере $r = \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, рассчитаем поток Φ напряженности электрического поля через бесконечно тонкую поверхность, содержащую внутри себя поверхность шарового сегмента радиуса $r = \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}$ с углом 2θ при вершине (см. рис.).

Вычисления дают:

$$\Phi = \frac{2\pi q}{\varepsilon_2} \beta^2 \frac{\sin^2\theta \cos\theta\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2\theta)(1 - \beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)}. \quad (7)$$

Поскольку поток Φ отличен от нуля, остается предположить, что на сфере существует электрическое поле $\mathbf{E}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, направленное в каждой точке параллельно поверхности сферы, такое, чтобы суммарный поток полей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ через вышеописанную поверхность равнялся бы нулю. Очевидно, что

$$E_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta) = \frac{\Phi\delta\left(r - \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)}{2\pi \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sin\theta} = \frac{f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)\,\delta\left(r - \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)}{r}. \quad (8)$$

Электрическое поле $E_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ представляет собой поперечное поле, и именно оно ответственно за излучение при скачке диэлектрической проницаемости. Интенсивность излучения, пропорциональная $E^2_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)$, бесконечна, поскольку не учтена дисперсия. Однако вполне имеет смысл говорить об интенсивности излучения на частоте ω. Для этого найдем Фурье-гармонику от $E_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$:

$$E_\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int dt e^{i\omega t} E_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta) =$$

$$= \frac{qV^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{2\pi c^3 \sqrt{\varepsilon_2}\,(1 - \beta^2\varepsilon_1\cos^2\theta)(1 - \beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)} \frac{e^{i\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}r}}{r}. \quad (9)$$

Отсюда легко найти интенсивность $I(\omega)$ на частоте ω, излученную в единичный телесный угол

$$I(\omega)=\frac{q^2V^4(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}\,c^5\,4\pi^2(1-\beta^2\varepsilon_1\cos^2\theta)^2(1-\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)^2}. \tag{10}$$

Это выражение совпадает с результатом В. Л. Гинзбурга и В. Н. Цытовича [2].

Для того чтобы рассчитать интенсивность переходного излучения при двойном скачке диэлектрической проницаемости, нет необходимости знать электрическое поле во всем пространстве, так как все поперечное поле излучения будет находиться на трех сферических поверхностях. Действительно, после первого скачка от начала координат будет расходиться волна вида (8). В момент второго скачка при $t=t_0$ эта волна расщепится на две, одна из которых будет расходящейся, а другая — сходящейся с «амплитудами», соответственно [5]:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\Theta)\ \text{и}\ \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta). \tag{11}$$

В момент $t=t_0\left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}\right)$ последняя волна сойдется в начале координат и далее станет расходящейся, «амплитуда» которой будет описываться выражением

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta+\pi). \tag{12}$$

Кроме этого, в момент t_0 второго скачка из точки $x=Vt_0$ начнет распространяться сферическая волна с «амплитудой» $f_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)$, где $f_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)$ описывается выражением (8) с ε_1 и ε_2 замененными на ε_2 и ε_3 соответственно.

Найдем полное электрическое поле излучения. Для достаточно больших расстояний $(r\gg Vt_0)$ и $t>t_0\left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}\right)$ имеем

$$\begin{aligned}E=\frac{1}{r}\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)\,\delta\left(r-\frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_3}}-\frac{ct_0}{\sqrt{\varepsilon_2}}+\frac{ct_0}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right)\Bigg]+\\+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta+\pi)\,\delta\left(r-\frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_3}}+\frac{ct_0}{\sqrt{\varepsilon_2}}+\frac{ct_0}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right)+\\+f_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)\,\delta\left(r+Vt_0\cos\theta+\frac{ct_0}{\sqrt{\varepsilon_3}}-\frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Найдем теперь Фурье-гармонику напряженности электрического поля E

$$\begin{aligned}E_\omega=\frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{2\pi c}\,e^{i\omega\frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{c}\left(r+\frac{ct_0}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right)}\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)\,e^{-i\omega t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}}+\\+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta+\pi)\,e^{+i\omega t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}}+f_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)\,e^{i\omega\beta\sqrt{\varepsilon_3}\cos\theta t_0}\Bigg]\frac{1}{r}.\end{aligned} \tag{14}$$

Квадрат модуля коэффициента, стоящего перед $\frac{1}{r}$, определяет интенсивность излучения на частоте ω. Эта интенсивность равна:

$$I_\omega(\theta)=\frac{(\varepsilon_3)^{3/2}}{4\pi^2 c}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)^2 f^2_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)+\right.$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)^2 f^2_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta+\pi)+$$
$$+f^2_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^2}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta+\pi)\cos\left(2\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}t_0\right)+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)f_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)\cos\left(\omega t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}(l+\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)\right)+$$
$$\left.+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}\right)f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta+\pi)f_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(\theta)\cos\left(\omega t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}(1-\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)\right)\right]. \quad (15)$$

Если в выражении (15) t_0 настолько велико, что аргументы у всех косинусов много больше единицы, то последними тремя членами в (15), которые обусловливают интерференцию, можно пренебречь. Тогда полная интенсивность излучения равна сумме интенсивностей каждой из трех сферических волн.

Если же t_0 мало, то, полагая косинусы в (15) равными единице, получим, что в этом случае интенсивность описывается выражением (10) с ε_2 замененным на ε_3. Как и следовало ожидать, интенсивность зависит лишь от начального и конечного значений диэлектрической проницаемости и не зависит от промежуточного.

Рассмотрим, для каких частот интенсивность излучения может быть положена равной сумме интенсивностей трех сферических волн. Как сказано выше, условия для этого следующие:

$$T\ll 2t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}},$$
$$T\ll t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}(1+\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta),$$
$$T\ll t_0\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}(1-\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta), \quad (16)$$

где

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Выражения $T/(1\pm\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)$ естественно назвать временами формирования излучения частоты $2\pi/T$ соответственно назад и вперед.

Автор благодарит Б. М. Болотовского за помощь и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. «Изв. вузов. Радиофизика», 1973, **16**, 4.
2. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. ЖЭТФ, 1973, **65**, 132.
3. Давыдов В. А. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1977, **18**, № 6.
4. Давыдов В. А. «Краткие сообщения по физике», 1976, **4**, 3.
5. Morgentaller F. R. IRE TRANS. 1958, **MTT-6**, 167.

Поступила в редакцию
20.9 1977 г.
Кафедра
квантовой теории