УДК 535.39

А. Ю. Клементьева
А. В. Тихонравов

ИССЛЕДОВАНИЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛ С УЧЕТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ В СЛОЯХ

Получены простые выражения для коэффициентов отражения, поглощения и фазовых сдвигов четвертьволновых диэлектрических зеркал с учетом поглощения в слоях в области плато высокого отражения, рассмотрены свойства зеркал, вытекающие из формул.

Слабое поглощение в слоях многослойного диэлектрического отражателя вызывает потери света, изменение его амплитудных и фазовых характеристик. Это приводит к соответствующему изменению формы и смещению интерференционных полос, полученных в устройствах, где используются многослойные покрытия.

В ряде экспериментов, связанных с изучением малых изменений параметров и сдвигов интерференционных полос, необходимо точное знание величины отражения R, потерь света A, хода фазовых характеристик в области отражения зеркала, их зависимости от длины волны. Точную оценку этих величин и их поведение в области отражения можно провести, пользуясь матричными соотношениями, которые дают ряд простых, удобных для быстрого расчета формул, приводимых авторами в данной работе. Вместе с тем соотношения позволяют выявить ряд основных свойств и их зависимостей от композиции диэлектрических зеркал.

Рассмотрим многослойные диэлектрические зеркала, состоящие из слоев с чередующимися комплексными показателями преломления $n_1+i\chi_1$ у нечетных слоев и $n_2+i\chi_2$ — у четных (слои считаем занумерованными в направлении падения света на зеркало). Мнимые части показателей преломления учитывают поглощение в слоях диэлектриков и являются малыми величинами. Пусть оптические толщины всех слоев одинаковы $n_1 d_1 = n_2 d_2 = p\,\frac{\lambda_0}{4}$. Здесь d_1 и d_2 — геометрические толщины нечетных и четных слоев, λ_0 — центральная длина волны зеркала, p — нечетное целое число.

Исследование свойств таких зеркал будем проводить в случае нормального падения света для длин волн λ, близких к центральной длине волны λ_0, учитывая только члены первого порядка малости по $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ и по χ_1 и χ_2.

Как известно [1], выражения для амплитудных коэффициентов пропускания t и отражения r многослойной системы могут быть записаны через элементы характеристической матрицы системы, а сама характеристическая матрица в случае периодической многослойной системы достаточно просто получена с использованием полиномов Чебышева. Мы будем следовать этим путем. Получим сначала характеристическую матрицу M для зеркала, состоящего из четного числа слоев.

Пусть M_1 и M_2 соответственно характеристические матрицы нечетных и четных слоев. Производя разложение в известном выражении для характеристической матрицы одного слоя [1] с точностью до членов первого порядка по $\Delta\lambda$, χ_1, χ_2, будем иметь:

$$M_k = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \begin{Vmatrix} p\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - i\frac{\chi_k}{n_k}\right) & -i\frac{1}{n_k}\left(1 - i\frac{\chi_k}{n_k}\right) \\ -in_k\left(1 + i\frac{\chi_k}{n_k}\right) & p\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - i\frac{\chi_k}{n_k}\right) \end{Vmatrix}. \quad (1)$$

Перемножим матрицы M_1 и M_2, сохраняя только члены первого порядка по $\Delta\lambda$, χ_1, χ_2:

$$M_1 \cdot M_2 = -\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} =$$

$$= -\begin{Vmatrix} a\left[1 + i\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right)\right] & p\frac{\pi}{2}\left[i\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) + \frac{\chi_1 + \chi_2}{n_1 n_2}\right] \\ p\frac{\pi}{2}\left[i\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}(n_1 + n_2) + \left(\chi_1 a + \frac{\chi_2}{a}\right)\right] & \frac{1}{a}\left[1 - i\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right)\right] \end{Vmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $a = \frac{n_2}{n_1}$.

Матрица зеркала, состоящего из $2N$ слоев, будет равна [1]:

$$M = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Vmatrix} = (M_1 \cdot M_2)^N =$$

$$= (-1)^N \begin{Vmatrix} a_{11}U_{N-1}(a_0) - U_{N-2}(a_0) & a_{12}U_{N-1}(a_0) \\ a_{21}U_{N-1}(a_0) & a_{22}U_{N-1}(a_0) - U_{N-2}(a_0) \end{Vmatrix}, \quad (3)$$

где U_{N-1}, U_{N-2} — полиномы Чебышева, а аргумент:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + i\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right).$$

Сохраним в элементах m_{jk} матрицы (3) члены только нулевого и первого порядка по $\Delta\lambda$, χ_1, χ_2: $m_{jk} = m_{jk}^0 + \Delta m_{jk}$ (m_{jk}^0 — члены нулевого порядка, Δm_{jk} — члены первого порядка).

Из (2), (3) получим:

$$m_{11}^0 = aU_{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right] - U_{N-2}\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right],$$

$$m_{22}^0 = \frac{1}{a}U_{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right] - U_{N-2}\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right], \quad (4)$$

$$m_{12}^0 = m_{21}^0 = 0;$$

$$\Delta m_{11} = \left[aU_{N-1} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)(aU'_{N-1} - U'_{N-2})\right] i\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right),$$

$$\Delta m_{22} = \left[-\frac{1}{a}U_{N-1} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}U'_{N-1} - U'_{N-2}\right)\right] i\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right),$$

$$\Delta m_{12} = U_{N-1}a_{12} = U_{N-1}p\frac{\pi}{2}\left[i\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) + \frac{\chi_1 + \chi_2}{n_1 \cdot n_2}\right], \quad (5)$$

$$\Delta m_{21} = U_{N-1} a_{21} = U_{N-1}\, p\, \frac{\pi}{2}\left[i\, \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}(n_1+n_2) + \left(\chi_1 a + \frac{\chi_2}{a}\right)\right].$$

Во всех этих выражениях аргумент полиномов Чебышева и их производных $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

Воспользуемся тем, что аргумент полиномов Чебышева имеет специальный вид.

$F(x, t) = \frac{1}{1-2tx+t^2}$ — производящая функция полиномов Чебышева $U_N(x)$, т. е.

$$F(x, t) = \frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, t^n. \tag{6}$$

При $x = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$$F(x, t) = \frac{1}{1-(a+a^{-1})\,t+t^2} = \frac{1}{(1-at)\left(1-\frac{t}{a}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}(at)^k. \tag{7}$$

Из сравнения (6) и (7) следует:

$$U_n\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right] = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^m a^{n-m} = a^n + a^{n-2} + \ldots + a^{-n+2} + a^{-n}. \tag{8}$$

Используя представление (8), из (4) получим

$$m_{11}^0 = a^N, \quad m_{22} = a^{-N}.$$

Преобразуем (5), принимая во внимание, что

$$\frac{dU}{da} = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) U_n',$$

$$aU_{N-1} + \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left[aU_{N-1}' - U_{N-2}'\right] =$$

$$= a\left[U_{N-1} + a\,\frac{dU_{N-1}}{da} - \frac{dU_{N-2}}{da}\right] =$$

$$= a\,\frac{d}{da}\left[aU_{N-1} - U_{N-2}\right] = a\,\frac{d}{da}(a^N) = Na^N.$$

Откуда

$$\Delta m_{11} = Na^N \cdot i\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right).$$

Аналогично получим

$$\Delta m_{22} = -Na^{-N} \cdot i\left(\frac{\chi_2}{n_2} - \frac{\chi_1}{n_1}\right).$$

Таким образом, в указанном приближении матрица M будет иметь вид

$$M=(-1)^N\begin{Vmatrix} a^N\left[1+iN\left(\frac{\chi_2}{n_2}-\frac{\chi_1}{n_1}\right)\right] & p\frac{\pi}{2}U_{N-1}\left[i\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)+\frac{\chi_1+\chi_2}{n_1n_2}\right] \\ p\frac{\pi}{2}U_{N-1}\left[i\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}(n_1+n_2)+(\chi_1 a+\chi_2 a^{-1})\right] & a^{-N}\left[1-iN\left(\frac{\chi_2}{n_2}-\frac{\chi_1}{n_1}\right)\right]\end{Vmatrix}. \qquad (9)$$

Пусть n_0 — показатель преломления среды, из которой свет падает на зеркало, $n_п$ — показатель преломления подложки. Тогда амплитудные коэффициенты отражения r и пропускания t выражаются через элементы матрицы M следующим образом [1]:

$$t=\frac{2n_0}{n_0m_{11}+n_пm_{22}+n_0n_пm_{12}+m_{21}},$$

$$r=\frac{n_0m_{11}-n_пm_{22}+n_0n_пm_{12}-m_{21}}{n_0m_{11}+n_пm_{22}+n_0n_пm_{12}+m_{21}}.$$

Подставляя в выражение для r значения m_{ik} из (9) и сохраняя только члены нулевого и первого порядка по $\Delta\lambda$, χ_1 и χ_2, получим

$$r=r_0\left\{1+\frac{t_0^2}{2n_0r_0}\left[2iNn_п\left(\frac{\chi_2}{n_2}-\frac{\chi_1}{n_1}\right)+n_пa^{-N}U_{N-1}a_{12}-a^NU_{N-1}a_{21}\right]\right\}, \qquad (10)$$

где a_{12}, a_{21} — обозначения, введенные в (2), а r_0 и t_0 — амплитудные коэффициенты для длины волны λ_0 без учета поглощения, определяемые соотношениями

$$t_0=(-1)^N\frac{2n_0}{n_0a^N+n_пa^{-N}},\quad r_0=\frac{n_0^0a^N-n_пa^{-N}}{n_0a^N+n_пa^{-N}}.$$

Рассмотрим два случая.

1. $a>1$, т. е. $n_2>n_1$.

Представим t_0 и r_0 в виде

$$t_0=(-1)^N\frac{2n_0a^{-N}}{n_0+n_пa^{-2N}},\quad r_0=\frac{n_0-n_пa^{-2N}}{n_0+n_пa^{-2N}},$$

а $U_{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$ (см. (8)) — в виде

$$U_{N-1}=a^{N+1}\frac{1-a^{-2N}}{a^2-1}.$$

Пренебрегая членами порядка a^{-2N}, получим из (10)

$$r=1-p\frac{\pi}{n_0}\left[i\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{n_1n_2}{n_2-n_1}+\frac{\chi_1n_2^2+\chi_2n_1^2}{n_2^2-n_1^2}\right]. \qquad (11)$$

Очевидно это приближение будет тем точнее, чем больше число слоев зеркала, т. е. чем ближе a^{-2N} к нулю.

2. $a<1$, т. е. $n_2<n_1$.

Пренебрегая в этом случае членами порядка a^{2N}, из (10) получаем

$$r=-\left[1-p\pi\left(i\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\,\frac{n_0}{n_1-n_2}+n_0\,\frac{\chi_1+\chi_2}{n_1^2-n_2^2}\right]. \quad (12)$$

Как следует из (11) и (12), в первом приближении поглощение в слоях зеркал не влияет на величину сдвига фазы при отражении вблизи центральной длины волны зеркала, а целиком определяет изменение модуля коэффициента отражения. Эти соотношения позволяют определить угол наклона фазовой характеристики вблизи центральной длины волны λ_0. Запишем отдельно выражения для энергетического коэффициента отражения r и фазового сдвига при отражении $\varphi_ч$:

при $n_2>n_1$

$$R=1-2p\,\frac{\pi}{n_0}\,\frac{\chi_1 n_2^2+\chi_2 n_1^2}{n_2^2-n_1^2}, \quad (13)$$

$$\varphi_ч=-p\,\pi\,\frac{n_1 n_2}{n_0(n_2-n_1)}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (14)$$

при $n_2<n_1$

$$R=1-2p\,\pi\,n_0\cdot\frac{\chi_1+\chi_2}{n_1^2-n_2^2}, \quad (15)$$

$$\varphi_ч=\pi-p\,\pi\,\frac{n_0}{n_1-n_2}\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (16)$$

Эти выражения были получены в предположении, что число слоев зеркала четно. Для зеркала с нечетным числом слоев характеристическая матрица равна произведению матрицы (9) на матрицу M_1 (см. (1)). Делая при выводе те же приближения, что и выше, для R и $\varphi_ч$ и в этом случае получим выражения (13)—(16).

Во введенном приближении (при $n_1<n_2$ отбрасываются члены $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{-2N}$, а при $n_1>n_2$ — $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{2N}$) энергетический коэффициент пропускания зеркал равен нулю, и поэтому поглощение в зеркалах $A=1-R$:

при $n_2>n_1$

$$A=2p\,\frac{\pi}{n_0}\,\frac{\chi_1 n_2^2+\chi_2 n_1^2}{n_2^2-n_1^2}, \quad (17)$$

при $n_2<n_1$

$$A=2p\,\pi\,n_0\,\frac{\chi_1+\chi_2}{n_1^2-n_2^2}. \quad (18)$$

Отбрасываемые члены $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{-2N}$ или $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{2N}$ стремятся к нулю при $N\to\infty$, поэтому выражения (13)—(18) являются по сути дела предельными и не содержат N. Однако ими можно пользоваться начиная с достаточно низких значений N, равных 5—10, так как при этом R и A достигают уже предельных значений в области плато отражения. Так из результатов [2] следует, что для систем $ZnS\,(n=2{,}3)$—$Na_3AlF_6\,(n=1{,}34)$, имеющих $\chi_1=\chi_2=0{,}003$ и $p=1$, предельное значение поглощения $\approx 1\%$ достигается при числе слоев, равном 6. Формула (13) в этом случае дает значение поглощения $A=1{,}07\%$, что согласуется с точным значением из [2].

Рассмотрение формул (13)—(18) приводит к некоторым выводам, касающимся свойств многослойных четвертьволновых отражателей, зависящих от показателей преломления и порядка нанесения слоев.

1. Поглощение зеркала A зависит от разницы показателей преломления чередующихся веществ, увеличиваясь при сближении n_1 и n_2; оно пропорционально увеличивается с ростом порядка интерференции слоев p.

2. Меньшую величину поглощения имеет зеркало, начинающееся слоем с большим показателем преломления n (со стороны падения светового пучка). Так, в случае системы ZnS—Na_3AlF_6 зеркало с внешним слоем ZnS ($n=2{,}3$) имеет потери на поглощение в несколько раз меньшие независимо от величин χ_1 и χ_2.

3. Характеристики зеркал не зависят от того, взято четное или нечетное число слоев N, что обусловлено предельностью соотношений ($N\to\infty$).

4. Как следует из (14), (16), в первом приближении малое поглощение в слоях не влияет на фазовые свойства четвертьволновых зеркал. Формулы (14), (16) описывают линейную зависимость сдвига фазы при отражении от зеркала в сравнительно широком спектральном диапазоне — в области плато отражения зеркала. Для широкого круга веществ ($n_1/n_2\approx 1:2$) эта область ограничена значениями $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\approx\pm 0.1$; для сочетаний веществ с $n_2/n_1\approx 1:3$ область простирается до $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\pm 0{,}3$. Фаза имеет больший наклон для систем, начинающихся слоем с малым показателем преломления. Величина коэффициента β при $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ в формуле (14) представлена в таблице для типичных композиций четвертьволновых зеркал; в таблице дается значение β_φ для случаев $n_2>n_1$ (14) и $n_2<n_1$ (16). Значения β совпадают с величинами, точно рассчитанными матричным методом.

Состав зеркала	Ge ($n=4{,}0$) SrF_2 ($n=1{,}4$)	Sb_2S_3 ($n=2{,}5$) CaF_2 ($n=1{,}3$)	ZnS ($n=2{,}3$) Na_3AlF_6 ($n=1{,}34$)	PbF_2 ($n=1{,}9$) Na_3AlF_6 ($n=1{,}36$)
$\beta_{n_2>n_1}$	2,15	2,71	3,21	4,79
$\beta_{n_2<n_1}$	0,385	0,834	1,04	1,85

Заметим, что все формулы (13)—(18) хорошо совпадают в области высокого отражения. Они позволяют быстро рассчитать в условиях слабого поглощения слоев достижимую величину отражения R, потери света на поглощение A и фазовые сдвиги φ.

Формулы (13)—(18) могут быть использованы и в обратном направлении для определения мнимых частей показателей преломления слоев по величине поглощения A в области плато отражения зеркал. Возможность такого применения определяется точностью измерения коэффициента отражения; если известны с достаточной точностью величины $A=1-R$ для двух типов зеркал, отличающихся друг от друга лишь показателями преломления внешнего слоя, то, решая систему линейных относительно χ_1 и χ_2 уравнений (17)—(18), можно определить χ_1 и χ_2 по известным n_1, n_2, n_0, A.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970.
2. Клементьева А. Ю., Тихонравов А. В. «Оптика и спектроскопия», 1974, 36, 777.

Поступила в редакцию
25.10 1977 г.
Кафедра оптики