УДК 533.951

Л. С. Кузьменков
П. А. Поляков

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Рассмотрена задача Ландау о развитии начального возмущения в релятивистской плазме с учетом торможения излучением. Показано, что для волн в плазме с плотностью 10^9—10^{14} см$^{-3}$, фазовая скорость которых значительно больше тепловой скорости электронов, затухание, обусловленное радиационным торможением, превосходит затухание Ландау.

Электромагнитные колебания в релятивистской плазме без учета торможения излучением рассматривались многими авторами (например, [1—3]). Для учета радиационного торможения А. А. Власовым [4], а затем в релятивистском случае Р. Хакимом и А. Манженеем [5] было рассмотрено кинетическое уравнение для функции распределения, зависящей от координат, скоростей и производных ускорений по собственному времени. Однако такое обобщение фазового пространства связано с неоднозначностью формулировки уравнения непрерывности в $M^4\times U^4\times \dot{U}^4$-пространстве. Более того, это обобщение не приводит к дополнительной информации о поведении статистических систем.

Рассмотрим кинетическое уравнение с учетом торможения излучением в рамках обычного фазового пространства $M^4\times U^4$. В релятивистской теории плотность вероятности и поток вероятности образуют единый дифференциально-геометрический объект $a^\alpha = u^\alpha \quad F(x, u)$, где

$$F(x, u) = f(x^\alpha, u^\alpha)\, 2\theta(u^0)\, \delta(u_\alpha u^\alpha - 1) - \tag{1}$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3)$$

инвариантная функция распределения, u^α =4-вектор скорости частицы.

Уравнение для $F(x, u)$ можно получить как уравнение непрерывности в $M^4\times U^4$-пространстве [4—5]. Запишем дифференциал a^α:

$$da^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma + \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^\beta}\, du^\beta \tag{2}$$

и предположим, что заданы коэффициенты разложения вектора по векторам элементарных смещений

$$du^\beta = \psi^\beta_\sigma (x, u)\, dx^\sigma, \tag{3}$$

т. е. задано тензорное поле $\psi_{\beta\sigma}(x, u)$, определяемое характером взаимодействий. После подстановки (3) в (2) становится математически корректной операция дивергенции 4-вектора потока вероятности. Уравнение непрерывности принимает вид

$$u^\sigma \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} + \Psi^\beta_\sigma u^\sigma \frac{\partial F}{\partial u^\beta} + \Psi^\sigma_\sigma F = 0. \tag{4}$$

Для частиц, взаимодействующих между собой только через электромагнитное поле, $\Psi_{\beta\sigma}=(e/mc^2)F_{\beta\sigma}$ и уравнение (4) совпадает с релятивистским уравнением Власова [6].

Из (2), (4) видно, что формально можно рассматривать и функцию распределения в пространстве $M^4\times U^4\times \dot{U}^4\times\cdots$. Однако уравнение (4) при этом не будет содержать новой информации о взаимодействии частиц и их распределении.

Излучение заряженных частиц при распространении высокочастотных возмущений в плазме сопровождается радиационным торможением $g^{\alpha}=G^{\alpha}_{\beta}\{F^{\gamma}_{\sigma}, u^{\nu}\}u^{\beta}$. Поэтому

$$\Psi^{\beta}_{\sigma}(x, u)=\frac{e}{mc^2}F^{\beta}_{\sigma}(x)+\frac{1}{mc}G^{\beta}_{\sigma}\{F^{\gamma}_{\delta}, u\}. \tag{5}$$

Тензор G^{α}_{β} может быть найден из приближенной формулы для торможения излучением [7]

$$g^{\alpha}=\frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}u_{\beta}u^{\gamma}-\frac{2e^4}{3m^2c^5}F^{\alpha\beta}F_{\gamma\beta}u^{\gamma}+\frac{2e^4}{3m^2c^5}F_{\beta\gamma}F^{\beta\nu}u^{\gamma}u_{\nu}u^{\alpha} \tag{6}$$

и условия сохранения числа частиц.

Уравнение (4), записанное для каждого сорта частиц, формулы (5), (6) и уравнения Максвелла полностью описывают поведение релятивистской плазмы в течение промежутков времени, значительно меньших времени между парными столкновениями.

Полная система линеаризованных уравнений имеет вид

$$u^{\alpha}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}+\frac{e}{mc^2}\left(F^{\alpha}_{\sigma}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}u_{\beta}\right)\frac{\partial(u^{\sigma}F_0)}{\partial u^{\alpha}}=0, \tag{7}$$

$$F_{\alpha}{}^{\sigma}=\frac{\partial A^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}, \quad \frac{\partial^2 A^{\alpha}}{\partial x_{\beta}\partial x^{\beta}}=\frac{4\pi e}{c}\int u^{\alpha}Fc^4 d_4u, \tag{8}$$

где F — малое возмущение некоторого равновесного распределения электронов $F_0(u)$, A^{α} — 4-вектор потенциала электромагнитного поля.

Рассмотрим задачу Ландау о развитии начального возмущения в плазме [8]

$$F(x^{\alpha}, u)|_{x^0=0}=g(x^k, u).$$

Применяя, как обычно, к уравнениям (7), (8) преобразование Фурье по координатам и преобразование Лапласа по времени

$$\widetilde{(\ldots)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{(\infty)}(\ldots)e^{ik_ix^i}d_3x, \quad \overline{(\ldots)}=\int\limits_0^{\infty}(\ldots)e^{-p_0x^0}dx^0,$$

получим

$$-ik_{\alpha}u^{\alpha}\bar{\tilde{F}}+\frac{e}{mc^2}\left[\bar{\tilde{F}}^{\alpha}_{\sigma}-\frac{2e^2}{3mc^2}ik_{\sigma}\bar{\tilde{F}}^{\alpha\beta}u_{\beta}+\tilde{\Phi}^{\alpha\beta}_{\sigma}u_{\beta}\right]\frac{\partial(u^{\sigma}F_0)}{\partial u^{\alpha}}=\tilde{g}\,u^0, \tag{9}$$

$$\bar{\tilde{F}}_{\alpha\sigma}=-i(k_{\alpha}\bar{\tilde{A}}_{\sigma}-k_{\sigma}\bar{\tilde{A}}_{\alpha})+\tilde{A}_{\alpha\sigma}, \tag{10}$$

$$-k_{\beta}k^{\beta}=\frac{4\pi e}{c}\int u^{\alpha}\bar{\tilde{F}}c^4d_4u+\left(\frac{\partial\tilde{A}^{\alpha}}{\partial x^0}-ik_0\tilde{A}^{\alpha}\right)\Bigg|_{x^0=0}, \tag{11}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\widetilde{\Phi}_0^{\alpha\beta} = -\frac{2e^2}{3mc^2}\widetilde{F}^{\alpha\beta}\big|_{x^0=0}, \quad \widetilde{\Phi}_k^{\alpha\beta} = 0,$$

$$\widetilde{A}_{00} = \widetilde{A}_{km} = 0, \quad \widetilde{A}_{k0} = -\widetilde{A}_{0k} = \widetilde{A}_k\big|_{x^0=0},$$

$$ik_0 = -p_0.$$

В качестве равновесного распределения электронов рассмотрим релятивистское распределение Максвелла — Больцмана [9]

$$F_0 = f_0 2\theta(u^0)\,\delta(u_\alpha u^\alpha - 1) =$$

$$= \frac{nmc^2}{4\pi c^3\theta K_2\left(\frac{mc^2}{\theta}\right)}\exp\left\{-\frac{mc^2}{\theta}u_0\right\}2\theta(u^0)\,\delta(u_\alpha u^\alpha - 1). \qquad (12)$$

Здесь n — плотность электронов, K_2 — функция Макдональда.

Перейдем к системе координат, в которой $k^\alpha = \{k^0, k^1, 0, 0\}$. Тогда из системы (9), (10) находим выражения для компонент тензора поля

$$\overline{\overline{F}}{}^{10} = \frac{B_1(0)}{D_1(p,k)}, \quad \overline{\overline{F}}{}^{20} = \frac{B_2(0)}{D_2(p,k)},$$

$$\overline{\overline{F}}{}^{30} = \frac{B_3(0)}{D_2(p,k)}, \quad \overline{\overline{F}}{}^{12} = -\frac{k^1}{k_0}\left(\overline{\overline{F}}{}^{20} - \widetilde{A}^2\big|_{x^0=0}\right),$$

$$\overline{\overline{F}}{}^{13} = -\frac{k^1}{k_0}\left(\overline{\overline{F}}{}^{30} - \widetilde{A}^3\big|_{x^0=0}\right), \quad F^{23} = 0, \; F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha},$$

где

$$D_1 = 1 - \frac{4\pi e^2}{c\theta k_1}\int\frac{u^0 u_1 f_0}{k_0 u^0 + k_1 u^1}d\Omega - i\frac{4\pi e^4}{3m^2c^5 k_1}\int\frac{u^0(k_0 u_1 - k_1 u_0)}{k_0 u^0 + k_1 u^1}f_0 d\Omega,$$

$$D_2 = 1 + \frac{4\pi e^2 k^0}{c\theta(k_0 k^0 + k_1 k^1)}\int\frac{u_2 u^2 f_0}{k_0 u^0 + k_1 u^1}d\Omega -$$

$$- i\frac{8\pi e^4 k^0}{3mc^3\theta(k_0 k^0 + k_1 k^1)}\int u_2 u^2 f_0 d\Omega + i\frac{8\pi e^4}{3m^2c^5}\int\frac{u^2 u_2 f_0}{k_0 u^0 + k_1 u^1}d\Omega,$$

$$d\Omega = c^4\frac{d^3u}{u_0},$$

а через $B_m(0)$ обозначены функции начальных возмущений поля и распределения электронов.

Компоненты Фурье-поля определяются обратным преобразованием Лапласа. Для вычисления появляющихся при этом интегралов воспользуемся известной процедурой Ландау [10] аналитического продолжения подинтегральной функции и сдвига контура интегрирования. Тогда при больших x^0

$$\widetilde{F}^{m0} = \sum_a R_a^m e^{-ik_a^0(k^1)x^0},$$

где R_a^m — вычеты функций $\overline{\overline{F}}{}^{m0}$. Зависимость k^0 от k^1 определяется дисперсионными соотношениями

для продольных колебаний:

$$1 - \frac{4\pi e^2}{c\theta k_1}\int\limits_L\frac{u^0 u_1 f_0}{k_0 u^0 + k_1 u^1}d\Omega - \frac{8\pi e^4}{3m^2c^5 k_1}\int\limits_L\frac{u^0(k_0 u_1 - k_1 u_0)}{k_0 u^0 + k_1 u^1}f_0 d\Omega = 0. \qquad (13)$$

для поперечных колебаний:

$$1+\frac{4\pi e^2 k^0}{c\theta(k_0k^0+k_1k^1)}\int\limits_L\frac{u_2u^2f_0}{k_0u^0+k_1u^1}d\Omega+i\frac{8\pi e^4}{3m^2c^5}\int\limits_L\frac{u_2u^2f_0}{k_0u^0+k_1u^1}d\Omega-$$
$$-\frac{8\pi e^4k^0}{3mc^3\theta(k_0k^0+k_1k^1)}\int\limits_L u_2u^2f_0d\Omega=0, \quad (14)$$

где L — контур Ландау.

Интегралы в соотношениях (13), (14) приводят к специальным функциям. Поэтому рассмотрим сначала дисперсионные соотношения с точностью до членов порядка v^3/c^3. В этом приближении

$$f_0c^3d^3u=n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\left(1-\frac{15}{8}\frac{\theta}{mc^2}-\frac{3}{8}\frac{m}{\theta}\frac{v^4}{c^2}+\frac{5}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)e^{-\frac{mv^2}{2\theta}}d_3v^k. \quad (15)$$

Полагая $k^0=\omega+i\gamma$, $k^1=k$, для почти действительных собственных частот интегралы в (13), (14) можно вычислить по формуле

$$\int\limits_L\frac{\varphi(\mathbf{v})f_0d\mathbf{v}}{\mathbf{kv}-\omega-i\gamma}=\left(1+i\gamma\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\int\limits_L\frac{\varphi(\mathbf{v})f_0d\mathbf{v}}{\mathbf{kv}-\omega}+\dots \quad (16)$$

Кроме того, при $\omega/k\gg v_T=\sqrt{\theta/m}$ для интегралов в смысле главного значения можно ограничиться разложением

$$-\oint\frac{\varphi(\mathbf{v})f_0d\mathbf{v}}{v^1-\omega/k}\cong\int\frac{k}{\omega}\varphi(\mathbf{v})f_0\left[1+v^1\frac{k}{\omega}+\left(v^1\frac{k}{\omega}\right)^2\right]d\mathbf{v}. \quad (17)$$

Используя (15)—(17), из (13), (14) получим
для продольных колебаний:

$$\omega^2=\left(1-\frac{5}{2}\frac{\theta}{mc^2}\right)\omega_p^2+\left(3-\frac{147}{8}\frac{\theta}{mc^2}\right)\frac{\theta}{m}k^2, \quad (18)$$

$$\gamma=-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{m}{\theta}\right)^{3/2}\frac{\omega_p^4}{k^3}\exp\left\{-\frac{m}{2\theta}\frac{\omega_p^2}{k^2}-\frac{3}{2}\right\}-\gamma_T, \quad (19)$$

$$\gamma_T=\frac{1}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega_p^2\left(1-2\frac{k^2}{\omega_p^2}\frac{\theta}{m}\right), \quad (20)$$

для поперечных колебаний:

$$\omega^2=k^2c^2+\omega_p^2\left(1-\frac{3}{2}\frac{\theta}{mc^2}\right), \quad (21)$$

$$\gamma=-\frac{1}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega_p^2, \quad (22)$$

где $\omega_p^2=4\pi e^2n/m$.

В нерелятивистском приближении полученные формулы совпадают с известными выражениями для частоты колебаний и затухания Ландау [10]. Учет торможения излучением приводит к затуханию как продольных, так и поперечных колебаний в плазме, причем для поперечных колебаний это затухание является единственным. При $\omega/k\gg V_T$ слабо зависит от длины волны. В этом случае затухание, обусловленное радиационным торможением, практически одинаково для обоих типов колебаний.

Сравнивая первое и второе слагаемые в (19), легко видеть, что значение фазовой скорости $v_{\text{ф}0}$, начиная с которого $\gamma_{\text{т}}$ превосходит затухание Ландау, определяется уравнением

$$\left(\frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{т}}}\right)^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{v_{\text{ф}}^2}{v_{\text{т}}^2}\right\} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, e^{-\frac{3}{2}} \frac{\gamma_{\text{т}}}{\omega_p} \cong 10^{-20}\sqrt{n}. \qquad (23)$$

Для значений плотности электронов $n \sim (10^9 \div 10^{14})$ см$^{-3}$ из (23) имеем $v_{\text{ф}0} \cong 9v_{\text{т}}$. При таких n затухание Ландау больше затухания, вызванного радиационным торможением, если $v_{\text{ф}} < 9v_{\text{т}}$, и может быть измерено экспериментально. Интервал фазовых скоростей, для которых затухание Ландау является преобладающим, увеличивается с уменьшением электронной плотности. Известные нам экспериментальные измерения затухания Ландау относятся именно к этому интервалу фазовых скоростей [11].

Для широкого класса плазменных сред $n \sim (10^9 \div 10^{14})$ см$^{-3}$ и $v_{\text{ф}} \gg v_{\text{т}}$. В этом случае можно приближенно положить

$$\gamma = \frac{1}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega_p^2 \sim 10^{-14} nc^{-1}. \qquad (24)$$

Для плазмы высокочастотного разряда $n \sim 10^{12}$ см$^{-3}$, для разряда низкого давления с холодным катодом $n \sim 10^{10}$ см$^{-3}$ и дугового разряда $n \sim (10^9 \div 10^{13})$ см$^{-3}$ численные оценки времени релаксации $\tau = 1/\gamma$ согласно (24) соответственно равны 10^2, 10^4 и $(10^3 \div 10^1)$.

Дисперсионные соотношения (13), (14) значительно упрощаются в ультрарелятивистском случае. При $\omega_p \ll kc$ получим

для продольных колебаний:

$$\omega = \sqrt{k^2c^2 - \left(\frac{\kappa mc^3}{\theta}\right)^2}, \qquad (25)$$

для поперечных колебаний:

$$\omega = \sqrt{k^2c^2 + \frac{\omega_p^2}{2}\frac{mc^2}{\theta}} \qquad (26)$$

Если $\theta \ll mc^2$, выражения (25) и (26) равны и совпадают дисперсионным соотношением для электромагнитных волн в вакууме $\omega = kc$. Декремент затухания $\gamma_{\text{л}}$ в этом приближении равен нулю. Факт равенства нулю затухания Ландау в ультрарелятивистском пределе отмечался и ранее [12].

Отметим, что для скоростей частиц, близких к скорости света, определяющим слагаемым в выражении для торможения излучением (6) является последнее слагаемое, которое не может быть учтено в рамках линейной теории.

Получим формулу (21) для затухания волн в плазме другим независимым способом. В приближении Власова плазма является системой некоррелированных зарядов без дебаевской «шубы» и должна рассеивать электромагнитные волны как газ, состоящий из отдельных электронов. Сечение рассеяния в этом случае является томсоновским [13]:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \qquad (27)$$

Вследствие этого эффекта часть энергии первичной плазменной волны посредством рассеянных волн передается флуктуационному фону, и поэтому волна затухает. Предполагая, что декремент затухания γ много меньше частоты ω, будем иметь

$$E = E_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi)$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} = -2\gamma \overline{W}, \tag{28}$$

где $\overline{W}$ — средняя по периоду колебаний плотность энергии первичной волны.

С другой стороны, согласно определению сечения рассеяния интенсивность рассеянных волн $\overline{I}$ равна

$$\overline{I} = n\sigma\overline{S}, \tag{29}$$

где $\overline{S} = c\overline{W}$ — вектор Пойтинга.

Потеря энергии плазменной волны вследствие рассеяния $\partial\overline{W}/\partial t$ равна полной интенсивности $\overline{I}$ рассеянных волн, т. е. $2\gamma\overline{W} = n\sigma c\overline{W}$. Отсюда

$$\gamma = \omega_p^2 \frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^3}, \tag{30}$$

что в точности совпадает с выражением (21) для декремента затухания, полученным на основе кинетической теории при $\theta \to 0$.

Таким образом, кинетическая теория с учетом торможения излучением в отличие от классической теории Власова содержит информацию о рассеянии электромагнитных волн в плазме отдельными электронами. Вычисления сечения рассеяния и декремента затухания в следующем приближении теории по величине плазменного параметра приводят к отличному от (30) значению [10]. Однако, как показывает эксперимент [13], рассмотренное выше приближение является удовлетворительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П. ЖЭТФ, 1960, 38, 1577.
2. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М., 1975.
3. Шафранев В. Д. ЖЭТФ, 1958, 34, 1475.
4. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1961.
5. Hakim R., Mangeney A. «J. Math. Phys.», 1968, 9, 116—130.
6. Климонтович Ю. Л. ЖЭТФ, 1959, 37, 735; 1960, 38, 1912.
7. Соколов А. А. Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
8. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 1946, 16, 574.
9. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1977, 17, № 1.
10. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. М., 1974.
11. Долгополов В. В., Ермаков А. И., Назаров Н. Н., Степанов К. Н., Толок В. Т. ЖЭТФ, 1963, 45, 1260.
12. Buti B. «Phys. Fluids», 1962. 5, 1.
13. Эккер Г. Теория полностью ионизированной плазмы. М., 1974.

Поступила в редакцию
13.9 1977 г.
Кафедра
теоретической физики