

УДК 621.373:548

**В. Б. Брагинский
В. П. Митрофанов****СТАБИЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТЫ
ГЕНЕРАТОРОВ МЕХАНИЧЕСКИМИ
РЕЗОНАТОРАМИ
ИЗ МОНОКРИСТАЛЛОВ САПФИРА**

Кварцевые генераторы являются примером широко известного способа стабилизации частоты электрических генераторов с помощью механических колебательных элементов. Он основан на том, что частота собственных колебаний последних гораздо меньше зависит от внешних условий, чем величины параметров электрической схемы генератора. Основными требованиями, которые предъявляются к механическому резонатору, стабилизирующему частоту генератора, являются малые температурные изменения его собственной частоты, минимальное старение резонатора и его высокая добротность, которая играет важную роль в улучшении стабильности частоты по отношению к случайным изменениям параметров электрической схемы и для повышения кратковременной стабильности частоты генератора [1].

В связи с этим представляется интересным исследовать стабильность частоты генераторов, стабилизированных механическими резонаторами из других материалов, например синтетического монокристаллического сапфира, обладающего рядом ценных свойств, в частности высокой физико-химической стойкостью и низким уровнем внутренних потерь [2]. По этим качествам он превосходит кварц. Но сапфир не обладает пьезоэлектрическими свойствами, поэтому он не может просто заменить кварцевый резонатор, а требует соответствующих схем преобразования электрических и механических колебаний.

Рассмотрим механический резонатор простейшего типа, представляющий собой подвешенный в узловой точке стержень, совершающий продольные колебания сжатия — растяжения. Нас интересует основная мода его собственных колебаний, когда узел смещения находится в средней части стержня, а смещения торцов максимальны. Тогда, если нанести на торцы металлическое покрытие, съём колебаний резонатора можно осуществить, например, с помощью емкостного датчика [3]. Для возбуждения механических колебаний резонатора можно использовать электростатический способ [3].

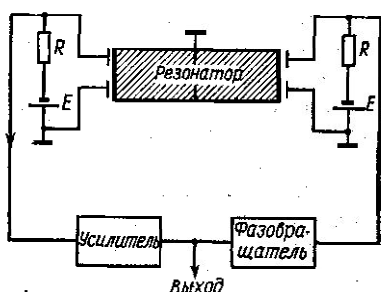
Механический резонатор с датчиком и системой раскачки представляет собой электромеханический резонансный элемент, имеющий вход и выход по электрическому сигналу. Если сигнал с выхода такого резонатора усилить и снова подать на вход в соответствующей фазе, то получим устройство, представляющее собой замкнутый электрический контур, в котором возможно генерирование незатухающих колебаний при выполнении фазовых и амплитудных условий самовозбуждения, так называемый электромеханический генератор. Блок-схема его приведена на рисунке. Конструктивно резонатор представляет собой цилиндр из монокристалла сапфира с посеребрёнными торцами,

подвешенный в центре на тонкой вольфрамовой проволоке [4]. Параллельно торцам цилиндра на расстоянии $\sim 0,1\text{--}1$ мм укреплены неподвижные пластины датчика и раскачки.

Такой резонатор является распределенной колебательной системой, имеющей бесконечное множество собственных частот, однако с увеличением номера гармоники требуется все больший коэффициент усиления усилителя, чтобы удовлетворить условиям самовозбуждения. Можно выполнить их только для основной моды и рассматривать резонатор как одномерную колебательную систему. Тогда уравнение для величины смещения x торцов резонатора имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{SEU(x)}{16\pi m d^2} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (x - \gamma x^3), \quad (1)$$

где m , ω_0 , β — эквивалентная масса, собственная частота и коэффициент затухания резонатора; S — площадь пластин, на которые подается



Блок-схема генератора

напряжение $U(x)$, возбуждающее колебания в резонаторе, и постоянное поляризующее напряжение E ; d — величина емкостного зазора; α_1 — коэффициент передачи емкостного датчика, α_2 — коэффициент усиления усилителя, α_3 — коэффициент преобразования электрического сигнала в силовое воздействие, возбуждающее колебания резонатора. Величина γ характеризует нелинейность электрической цепи. Значок τ показывает, что электрический сигнал в системе возбуждения отстает по фазе $\varphi = \omega\tau$ от механических колебаний резонатора.

Решение уравнения (1) в первом и втором приближении может быть получено асимптотическим методом Боголюбова — Митропольского [5]. При этом мы предполагаем высокую добротность резонатора и, следовательно, малость членов в правой части уравнения (1). В первом приближении для амплитуды a и частоты ω генерируемых колебаний получаем выражения:

$$a^2 = \frac{2\beta\omega + \alpha \sin \varphi}{3/4\alpha\gamma \sin \varphi}, \quad (2)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{\beta}{\tan \varphi}, \quad (3)$$

где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Из выражений (1) и (2) можно получить величину коэффициента усиления усилителя α_2 для обеспечения режима незатухающих колебаний. Записывая его через параметры генератора, получаем

$$\alpha_2 = \frac{16\pi m \omega_0^2 d^3}{SE^2 Q}.$$

Подставляя значения параметров: $m = 500$ г, $\omega_0 = 2 \cdot 10^5$ рад/с, зазоры $d_1 = d_2 = d = 10^{-1}$ см, площадь пластин $S = 4$ см², постоянное напряжение на зазорах $E = 100$ В, добротность резонатора $Q = 5 \cdot 10^9$ [4], получаем $K = 500$.

Выражение (3) показывает, что оптимальный сдвиг фазы φ в электрической цепи генератора составляет $\pi/2 + 2\pi n$. При этом генерируемая частота определяется только собственной частотой колебаний резонатора. Второе приближение дает поправку к частоте, возникающую благодаря наличию гармоник в электрической цепи генератора из-за ее нелинейности, имеющую порядок малости $1/Q^2$.

Выражения (2) и (3) дают возможность проанализировать основные источники нестабильности генерируемой частоты. Для изменения частоты $\delta\omega/\omega$ при квазистатических изменениях параметров генератора получаем следующее выражение:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta\omega_0}{\omega_0} + \frac{1}{2Q} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \delta\varphi + \frac{1}{Q} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\delta Q}{Q} + \frac{\kappa}{Q^2} \frac{\delta K}{K}, \quad (4)$$

где κ — числовой коэффициент.

Выражение (4) показывает, что высокая добротность механического стабилизирующего элемента играет важную роль в уменьшении влияния флуктуаций в электрической схеме генератора на генерируемую частоту.

Рассмотрим факторы, определяющие стабильность собственной частоты ω_0 сапфирового резонатора. Электрические цепи датчика и возбуждения колебаний вносят в резонатор дополнительную жесткость $K_{\text{внос}}$, так как постоянная составляющая силы электростатического притяжения между резонатором и пластинами (см. рисунок) изменяется с изменением величины емкостного зазора при колебаниях кристалла. Вносимую жесткость и соответственное изменение собственной частоты резонатора нетрудно рассчитать:

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{2k_{\text{внос}}}{m\omega_0^2} = \frac{-SE^2}{2\pi d^3 m \omega_0^3} \frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega_0^2},$$

здесь обозначения те же, что и в формуле (1), C — емкость, образованная электродами датчика или раскочки и металлизированным торцом резонатора, R — активное сопротивление электрической цепи возбуждения колебаний (эта цепь оказывает наибольшее влияние, так как в цепи датчика $RC \gg \frac{1}{\omega}$). Подставляя числовые значения параметров $S=4 \text{ см}^2$, $m=500 \text{ г}$, $E=100 \text{ В}$, $d=0,1 \text{ см}$, $\omega_0=2 \cdot 10^5 \text{ рад/с}$, $C=5 \text{ пФ}$, $R=2 \text{ МОм}$, получаем $\Delta\omega_0/\omega_0 \approx 6 \cdot 10^{-13}$. Тогда относительное изменение собственной частоты резонатора будет следующим образом связано с изменением постоянного поляризующего напряжения $\frac{\delta E}{E}$:

$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} \approx 10^{-12} \frac{\delta E}{E}.$$

При тех же значениях параметров для вносимого затухания имеем оценку:

$$Q_{\text{внос}}^{-1} = \frac{SE^2}{4\pi d^3 \omega_0^3 RC} \approx 10^{-12}.$$

На стабильность частоты электрического сигнала, снимаемого с выхода емкостного преобразователя механических колебаний кристалла, оказывают влияние сейсмические помехи, вызывающие тряску и дрожание кристалла в подвесе. При этом случайным образом изменяется величина зазоров между торцами резонатора и неподвижно закреп-

ленными пластинами преобразователя. Будем предполагать, что флуктуации зазоров представляют собой случайный процесс, имеющий ограниченную спектральную плотность мощности в интервале частот $0 - \Omega_{\text{гр}}$

$$S_{\delta d}(\Omega) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{гр}} \\ 0 & \text{при } \Omega > \Omega_{\text{гр}} \end{cases}$$

с дисперсией величины относительных флуктуаций зазора

$$D_{\delta d} = \int_0^{\infty} S_{\delta d}(\Omega) d\Omega.$$

Флуктуации зазора приводят к изменению амплитуды и фазы электрического сигнала в цепях датчика-преобразователя и раскачки. Угол Φ , на который поворачивает фазу сигнала схема датчика, дается выражением

$$\text{tg } \Phi = -\frac{1}{\omega RC}.$$

Для малых флуктуаций относительное изменение емкости равно относительному изменению зазора $\Delta d/d$. Тогда

$$\Delta \Phi = -\frac{\text{tg } \Phi}{1 + \text{tg}^2 \Phi} \frac{\Delta d}{d}$$

и соответственно

$$S_{\Delta \Phi}(\Omega) = \frac{\text{tg}^2 \Phi}{(1 + \text{tg}^2 \Phi)^2} S_{\delta d}(\Omega).$$

Зная спектральную плотность флуктуаций фазы колебаний, можно определить дисперсию усредненного за время τ значения частоты [6]:

$$\begin{aligned} D_{\omega} &= \int_0^{\infty} S_{\Delta \Phi}(\Omega) \Omega^2 \frac{\sin^2(0,5\Omega\tau)}{(0,5\Omega\tau)^2} d\Omega = \\ &= 4 \frac{\text{tg}^2 \Phi}{(1 + \text{tg}^2 \Phi)^2 \tau^2} D_{\delta d} - \frac{\text{tg}^2 \Phi (1 - \sin \Omega_{\text{гр}}\tau) A}{(1 + \text{tg}^2 \Phi)^2 \tau^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

При $\Omega_{\text{гр}}\tau \gg 1$ второе слагаемое в (5) много меньше первого, и для оценок им можно пренебречь. Подставляя в (5) параметры электрической цепи датчика $R=3 \cdot 10^7$ Ом, $C=5$ пФ, получаем оценку среднего квадратичного отклонения усредненного значения частоты сигнала $\sigma(\bar{\omega}_\tau)$

$$\frac{\sigma(\bar{\omega}_\tau)_{\text{сейсм}}}{\omega} \approx \frac{3 \cdot 10^{-7} \sigma(\delta d)}{\tau}.$$

Для используемых нами подвесов сапфировых резонаторов $\sigma(\delta d)$ обычно не превышает 10^{-2} . Если нас интересуют флуктуации частоты за малые промежутки времени, необходимо принимать меры по защите от сейсмических помех.

В цепях датчика-преобразователя существуют электрические шумы. Причем определяющим является тепловой шум входного сопротивления датчика. Шумы складываются с сигналом и приводят к нестабильности его частоты (см., например, [6]):

$$\frac{\sigma(\bar{\omega}_r)}{\omega} = \frac{1}{\omega\tau} \sqrt{\frac{P_{\text{ш}}}{P_c}}, \quad (6)$$

где $P_{\text{ш}} = \kappa T \frac{\Delta\omega}{2}$ — мощность тепловых шумов в полосе частот $\Delta\omega$, P_c — мощность электрического сигнала.

Мощность механических колебаний, рассеиваемых в резонаторе, при амплитуде его колебаний a равна

$$P = \frac{m\omega^2 a^2}{2Q} = 4 \cdot 10^{-11} \text{ Вт},$$

если подставлять значения параметров резонатора, указанные выше, и $a = 10^{-6}$ см. При этом мощность электрического сигнала на выходе датчика-преобразователя $P_c = 10^{-13}$ Вт. Подставляя это значение в формулу (6), получаем для $\Delta\omega = 10^2$ Гц следующее значение относительной неустойчивости частоты сигнала:

$$\frac{\sigma(\bar{\omega}_r)_{\text{эл}}}{\omega} \approx 10^{-8} \frac{1}{\tau}.$$

Естественная ширина линии генератора, стабилизированного резонатором из монокристалла сапфира, может быть рассчитана обычным способом. Здесь также основным источником флуктуаций, вызывающих дрейф фазы колебаний генератора, является тепловой шум входного сопротивления датчика-преобразователя. Уравнение генератора (1) с флуктуационным членом имеет стандартный вид и может быть рассмотрено аналогично тому, как это сделано, например, в работе [7]. Тогда для относительной ширины линии генерации $\frac{\Delta\Omega}{\omega}$ получаем следующее выражение:

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{2\pi^2 \kappa T R_{\text{ш}} \omega}{a^2 \omega_1^2 Q}. \quad (7)$$

При выводе (7) предполагалось, что общий коэффициент усиления цепи обратной связи $\alpha \simeq \omega_0^2/Q$. Подставляя в (7) значения параметров, получаем для относительной ширины линии $\Delta\Omega/\omega = 3 \cdot 10^{-21}$.

Изменение температуры резонатора является одним из самых существенных факторов, влияющих на его собственную частоту колебаний. Все упругие постоянные сапфира имеют один и тот же знак [2], поэтому невозможно найти срез с нулевым значением ТКЧ (температурного коэффициента частоты), как это делается в кварце. Но так как при температуре жидкого гелия $T = 4,2$ К измеренное нами значение ТКЧ сапфировых резонаторов продольных колебаний, направление длины которых совпадает с осью L_2 , составляет $3 \cdot 10^{-10}$ 1/град, это позволяет, термостатируя резонатор при температуре 4,2 К на уровне 10^{-4} К, обеспечить постоянство собственной частоты резонатора с точностью $\Delta\omega_0/\omega_0 = 10^{-13}$.

Нетрудно убедиться в том, что при температуре $T = 4,2$ К для сапфировых резонаторов с добротностью $Q = 10^9$ при амплитудах колебаний $10^{-6} \div 10^{-7}$ см нагреванием кристалла за счет диссипации механической энергии колебаний можно пренебречь.

Известно, что основной причиной, ограничивающей стабильность частоты кварцевых резонаторов, является медленное систематическое изменение параметров кварцевого резонатора, так называемое «старе-

ние» резонатора. Хотя накоплен большой экспериментальный материал по старению кварцевых резонаторов, до настоящего времени не создано какой-либо удовлетворительной модели, позволяющей дать количественные оценки [8].

Ситуация, когда резонатор работает при температуре жидкого гелия, имеет определенную особенность процесса старения по сравнению с обычно изучаемым процессом старения резонатора, находящегося при комнатных температурах. Рассматривая отдельно процесс изменения массы и жесткости резонатора, со временем можно заключить, что изменение массы резонатора происходит в основном за счет адсорбции и десорбции на поверхности кристалла. Десорбция в данном случае относится и к частицам кристалла на его поверхности, слабо связанным с самим кристаллом. Время пребывания τ адсорбированной молекулы на поверхности зависит, по Френкелю, от температуры

$$\tau = \tau_0 \exp \frac{W}{RT}, \quad (8)$$

где W — энергия связи, зависящая от свойств адсорбированной молекулы и рода поверхности, R — универсальная газовая постоянная, T — температура поверхности, τ_0 — период колебаний адсорбированной молекулы. Выражение (8) показывает, насколько сильно уменьшается процесс десорбции при переходе от комнатной к гелиевым температурам. При температуре 4,2 К только молекулы гелия будут вносить значимый вклад в процесс нарушения адсорбционно-десорбционного равновесия на поверхности кристалла, так как парциальное давление паров всех других веществ незначительно [9]. Если на поверхность резонатора массой 500 г поместить один мономолекулярный слой атомов He, то его собственная частота изменится на величину

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\Delta m}{m} = \frac{S_{\text{пов}} N m_0}{2m} \approx 10^{-10}$$

при указанных выше параметрах резонатора. При самых общих законах адсорбции изменение количества адсорбированных молекул $\frac{\Delta N}{N} \sim \frac{\Delta T}{T}$, следовательно

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\Delta N m_0}{2m} \approx 10^{-10} \frac{\Delta T}{T},$$

и при термостатировании эту составляющую нестабильности частоты можно сделать малой.

Жесткость резонатора как колебательной системы складывается из собственно жесткости кристалла и жесткости, вносимой со стороны подвеса. Рассмотрим резонатор, подвешенный на тонкой вольфрамовой проволоке [4]. Вносимую со стороны подвеса жесткость можно оценить следующим образом:

$$K_{\text{вн}} = \frac{a_{\text{подв}}}{a} \xi K_n,$$

где a — амплитуда колебаний резонатора, $a_{\text{подв}}$ — амплитуда колебаний элемента поверхности в месте контакта с нитью подвеса, K_n — жесткость нити подвеса для ее поперечных смещений, ξ — коэффициент передачи колебаний поверхности кристалла в нить.

Оценим K_n для резонатора, исследованного в работе [4], подвешенного на вольфрамовой проволоке диаметром 100 мкм. В качестве K_n возьмем жесткость струнных колебаний проволоки $K_n = \frac{mg}{l}$, $\frac{a_{\text{подв}}}{a} \approx 10^{-2}$. Наши исследования нитяных подвесов сапфировых резонаторов показывают, что величина ξ составляет 10^{-2} и менее за счет неполного соприкосновения неидеально гладких поверхностей нити и кристалла и наличия изолирующих адсорбирующих слоев. Получаем

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{K_{\text{вн}}}{K} \approx 10^{-12},$$

а флуктуации этой величины еще меньше.

Все рассмотренные выше факторы, определяющие нестабильность частоты исследуемых генераторов, носят технический характер, и оценки приводятся для самых обычных лабораторных условий работы.

Можно, однако, указать предел стабильности частоты свободных колебаний механического резонатора, основываясь на самых общих квантовомеханических представлениях. Для резонатора, работающего при низких температурах, в сочетании с оптимальным датчиком-преобразователем можно добиться существенного уменьшения влияния тепловых флуктуаций. Но нельзя избавиться от влияния измерительного прибора. Это не позволяет регистрировать координату резонатора точнее, чем при непрерывном измерении в течение периода колебаний

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$$

[10]. На такую же величину прибор возмущает координату резонатора, следовательно, непрерывно изменяется фаза его колебаний. Отсюда получаем оценку предельной стабильности частоты резонатора при условии, что время измерения τ много меньше времени релаксации механических колебаний:

$$\frac{\sigma(\bar{\omega}_\tau)}{\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0^2 a_0^2 \tau}}, \quad (9)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Формулу (9) можно переписать в другом виде, введя относительную амплитуду колебаний $\xi = a/l$ и используя соотношение между собственной частотой резонатора ω_0 , его объемом V , длиной l и модулем упругости материала E_M :

$$\frac{\sigma(\bar{\omega}_\tau)}{\omega} = \frac{2}{\pi\xi} \sqrt{\frac{\hbar}{E_M V \tau}} \approx 6 \cdot 10^{-15} \frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

Числовая оценка получена для сапфирового резонатора, рассматриваемого в данной работе.

В настоящее время созданы макеты генераторов, стабилизированных сапфировыми резонаторами. Предварительные исследования показывают, что нестабильность их частоты не превышает $5 \cdot 10^{-12}$ за сутки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гербер, Сайкс. ТИИЭР, 1966, 54, № 2, 5.
2. Рубин и сапфир. М., 1974.
3. Bordoni P. G. «Nuovo Cim.», 1947, 4, 177.
4. Багдасаров Х. С., Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Шиян В. С. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ., астроном.», 1977, 18, № 1, 98.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963.
6. Аппаратура для частотных и временных измерений. М., 1971.
7. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., 1963.
8. Смирнов А. И. Труды ВНИИФТРИ, вып. 9 (39), 1973.
9. Грошковский Я. Техника высокого вакуума. М., 1975.
10. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. «Письма в ЖЭТФ», 1978, 27, 296.

МГУ. Кафедра
физики колебаний