

УДК 537.312.22

Р. О. Зайцев
Н. И. ПушкинаКОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ
ЗВУКА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ He II

Введение. В сверхтекучем гелии, как и в других средах, распространение достаточно сильной по интенсивности акустической волны сопровождается нелинейными явлениями. К таким явлениям относится комбинационное взаимодействие звука с различными элементарными возбуждениями.

В работах [1, 2] было рассмотрено взаимодействие звука с затухающими температурными волнами в сверхтекучем He⁴. В данной работе мы рассмотрим вынужденное комбинационное рассеяние акустической волны на вихревых колебаниях, которые возникают во вращающейся сверхтекучей жидкости.

Известно, что в такой жидкости образуется система параллельных вихревых нитей с осями вдоль направления оси вращения z . В такой системе может существовать несколько типов поперечных колебаний. По установившейся традиции мы будем называть геострофической волной (Γ -волна) такие колебания, которые могли бы распространяться (за счет силы Кориолиса) и в классической идеальной вращающейся жидкости (такие волны можно наблюдать в океане и в атмосфере). Во вращающемся сверхтекучем гелии вихревая система обычно образует треугольную решетку с отличными от нуля модулями сдвига. В такой решетке перпендикулярно вихревым нитям может распространяться еще один тип поперечной волны с чрезвычайно малой скоростью, так называемая волна Ткаченко (T -волна) [3].

Если вихревая структура разупорядочена, тогда Γ -волна затухает слабо, а T -волна превращается в релаксационное колебание. Заметим, что, в отличие от геострофических волн, волны Ткаченко экспериментально почти не изучены (см. обзор [4]). Исследование комбинационного рассеяния звука во вращающемся гелии могло бы дать сведения о существовании и свойствах таких волн.

Обозначим волновые векторы возбуждающей и рассеянной звуковых волн k и k' ; волновой вектор вихревых возбуждений, на которых происходит рассеяние (Γ - либо T -волны), обозначим q .

Известно, что частота геострофических колебаний пропорциональна проекции волнового вектора q на направление угловой скорости Ω ($\omega \sim 2\Omega \cos \alpha$). Поэтому рассеяние наиболее эффективно, когда передаваемый импульс направлен вдоль оси вращения (см. рисунок, а). Если волновой вектор q перпендикулярен оси z ($\alpha = \pi/2$), в системе распространяется только T -волна, причем в этом случае ее частота максимальна (при заданном q). Схема рассеяния на T -волне при этих условиях приведена на рисунке, б.

В настоящей работе вычислен порог комбинационного акустического рассеяния на геострофической волне и волне Ткаченко. Показано, что при разумных значениях угловой скорости вращения ($\Omega \sim 10 \text{ с}^{-1}$) пороговая интенсивность возбуждающего звука оказывается экспериментально достижимой величиной.

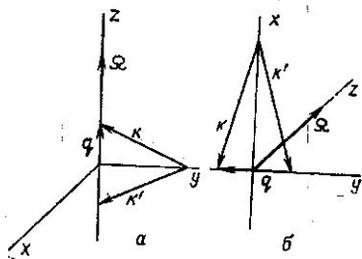


Схема рассеяния звука на Г-волне (а) (вектор поляризации лежит в плоскости xyz), схема рассеяния звука на Т-волне (б) (вектор поляризации направлен вдоль оси x). В обоих случаях вихревая волна распространяется вдоль φ

Основные уравнения и спектр возбуждений. Линеаризованные уравнения для сверхтекучей и нормальной скоростей вращающегося гелия имеют следующий вид [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + \kappa \sum_j \int [d\mathbf{R}_j \mathbf{V}(\mathbf{R}_j)] \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j) - \sigma \nabla T + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} + 2[\Omega \mathbf{V}_n] + \frac{\rho_s}{\rho_n} \kappa \int [d\mathbf{R}_j, \mathbf{V}_s(\mathbf{R}_j) - \mathbf{V}(\mathbf{R}_j)] \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j) + \\ + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma \nabla T + \frac{1}{\rho} \nabla p + \text{в. ч.} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{R}_j)$ — скорость элемента $d\mathbf{R}_j$ вихревой нити с радиус-вектором \mathbf{R}_j ; $\kappa = h/m$ — квант циркуляции, в. ч. — вязкие члены.

Предположим, что вихри не образуют упорядоченной структуры.

При рассмотрении колебаний геострофического типа можно считать вихри параллельными угловой скорости и в пределе, когда длина волны превышает среднее расстояние между вихрями, суммы по вихрям в уравнениях (1), (2) можно заменить интегралами $\sum_j \rightarrow n \int dx_j dy_j$ (n — плотность вихрей). В результате уравнения преобразуются к виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} - \sigma \nabla T + \frac{1}{\rho} \nabla p + \kappa \frac{n}{\Omega} [\Omega \mathbf{V}] = 0, \quad (1')$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma \nabla T + \frac{1}{\rho} \nabla p + \text{в. ч.} + 2[\Omega \mathbf{V}_n] + n \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\kappa}{\Omega} [\Omega, \mathbf{V}_s - \mathbf{V}_n] = 0. \quad (2')$$

Величину n получаем из известного соотношения

$$\text{rot } \mathbf{V}_s = -2\Omega + \kappa \sum_j d\mathbf{R}_j \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j).$$

Усредняя его по тем же правилам, что и при переходе от уравнений (1), (2) к (1'), (2'), находим

$$\overline{\text{rot } \mathbf{V}_s} = 0 = n\kappa \frac{\Omega}{\Omega} - 2\Omega, \quad (3)$$

$$n = \frac{2\Omega}{\kappa}.$$

Таким образом, поперечные длинноволновые геострофические волны, распространяющиеся вдоль направления Ω , описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + 2[\Omega \mathbf{V}] &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} + 2[\Omega \mathbf{V}] &= -\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V}_n; \quad \mathbf{V} = \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{V}_s + \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{V}_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь все три вектора скорости лежат в плоскости, перпендикулярной Ω , так что условие поперечности, совпадающее с условием несжимаемости, выполняется автоматически.

Точно такие же уравнения получаются и для треугольного расположения вихрей, если предположить, что длина волны вихревых колебаний превышает расстояние между вихрями a ($a = (\kappa/\Omega \sqrt{3})^{1/2}$).

Элементарное исследование системы (4) показывает, что в пределе больших длин волн $\nu q^2 \ll \Omega$ имеется волна с частотой 2Ω и малым затуханием

$$\omega = 2\Omega - i\nu q^2. \quad (5)$$

При этом $\mathbf{V}_s \approx \mathbf{V}_n \approx \mathbf{V}$.

Обратный предельный случай ($\nu q^2 \gg \Omega$) не описывается уравнениями (4), т. е. ему отвечают волновые векторы, превышающие обратное расстояние между вихрями $a^{-1} \sim (\Omega/\kappa)^{1/2}$. Это обстоятельство связано с малостью величины вязкости ν в сверхтекучем гелии по сравнению с κ ($\nu < \kappa \approx 10^{-3}$ см²/с).

Для того чтобы вычислить амплитуды нормальных колебаний, запишем зависящую от скоростей часть плотности гамильтониана (см. [2]):

$$T = \frac{\rho V_s^2}{2} + \mathbf{p} \mathbf{V}_s + \frac{p^2}{2\rho_n}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{p} = \rho_n (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s). \quad (6')$$

Если пренебречь центробежной энергией, тогда во вращающейся системе кинетическая энергия будет определяться той же формулой (6), в которой под \mathbf{V}_s и \mathbf{V}_n следует понимать скорости относительно вращающейся системы.

После интегрирования по объему для каждой моды мы должны получить слагаемое

$$\frac{1}{2} (b_q b_q^+ + b_q^+ b_q) \hbar \omega_q$$

(ω_q — частота колебания без учета вязкости). Направляя вектор \mathbf{q} вдоль Ω , находим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{sq} = \mathbf{V}_{nq} &= E e b(t) + \text{э. с.}, \\ b(t) &= b e^{-2i\Omega t}, \quad B = (\hbar \Omega / \rho)^{1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

а вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}; 0 \right). \quad (8)$$

Формулы (5)—(8) описывают поперечные геострофические волны, распространяющиеся вдоль Ω .

Уравнения (4) не описывают Т-волну, однако ее поляризация и закон дисперсии хорошо известны. Предположим, что вектор поляризации направлен вдоль оси y , если вектор угловой скорости направлен вдоль z (см. рисунок, б). Вектор скорости можно сразу написать, если произвести вторичное квантование поперечных волн, распространяющихся в сплошной упругой среде

$$\mathbf{V}_{sq} = \sqrt{\frac{\hbar\omega(q)}{2\rho V}} (b_q(t) + b_{-q}^+(t)) \mathbf{e}_x;$$

$$b_q(t) = b_q e^{-i\omega_q t}, \quad \omega_q = \frac{\rho_s}{\rho} \sqrt{\frac{\Omega\kappa}{8\pi}} q, \quad (9)$$

\mathbf{e}_x — единичный вектор, направленный вдоль оси x . Используемая в (7) и (9) нормировка приводит гармоническую часть гамильтониана к виду

$$H = \sum \frac{1}{2} \hbar\omega_q (bb^+ + b^+b).$$

В таком случае, как показано в [6], порог вынужденного рассеяния определяется простой формулой (15) (см. ниже).

Выражения (7) и (9) являются двумя предельными случаями более общего соотношения, когда \mathbf{q} направлено под произвольным углом к оси z . Формула (7) соответствует случаю $\mathbf{q} \parallel z$, при этом скорость Т-волны обращается в нуль. Формула (9) отвечает направлению $\mathbf{q} \perp z$; в этом случае обращается в нуль скорость Г-волны.

Как отмечено в работе [5], в пределе $\Omega \gg \omega_q$ нормальный и сверхтекучий компоненты движутся приблизительно с одинаковой скоростью V , поэтому $V_{nq} \approx V_{sq}$, а нормировочный множитель содержит полную плотность ρ . Малая относительная скорость вихрей и нормального компонента приводит к слабому затуханию

$$\text{Im } \omega = -\frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho} \left[1 + \frac{\kappa\omega^2}{8\pi\Omega v^2 q^2} \ln \frac{r_m}{l} \right] vq^2.$$

После замены $\omega^2 \rightarrow \omega_q^2$ имеем

$$\text{Im } \omega = -\frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho} vq^2 \left[1 + \left(\frac{\rho_n \kappa}{8\rho v l} \right)^2 \ln \frac{r_m}{l} \right]. \quad (10)$$

Здесь $\ln(r_m/l)$ — не слишком большая величина, так что большой знаменатель делает второе слагаемое малой поправкой. (Все обозначения взяты из работы [5].)

При рассмотрении продольных колебаний (звука) учет вращения системы приводит к поправкам, содержащим малое отношение частоты вращения к частоте возбуждающей звуковой волны. По этой причине в нулевом приближении по Ω/ω можно воспользоваться нормальными координатами, полученными в работе [2],

$$\rho_s = A(a_k + a_{-k}^+),$$

$$\mathbf{V}_{sk} = A \frac{c}{\rho} \frac{k}{k} (a_k - a_{-k}^+), \quad (11)$$

где $A = \sqrt{\frac{\rho k}{2c}}$, c — скорость первого звука.

Вычисление амплитуды рассеяния и порогов. Рассмотрим кинетическую часть плотности гамильтониана (6). Разложим все векторы на продольную и поперечную части и выделим слагаемые, содержащие поперечный компонент в первой степени:

$$T = \rho \mathbf{V}_{st} \mathbf{V}_{st} + \mathbf{p}_i \mathbf{V}_{st} + \mathbf{p}_i \mathbf{V}_{st} + \frac{1}{\rho_n} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i,$$

так как $\mathbf{V}_n \approx \mathbf{V}_s$ и $\mathbf{p} = \rho_n (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)$ (см. (6')), то приведенное выражение сводится к виду

$$T = \rho \mathbf{V}_{st} \mathbf{V}_{st}. \quad (12)$$

Таким образом, ангармоническая часть гамильтониана, определяющая рассеяние звука на поперечных колебаниях, имеет следующий вид:

$$\int \delta \rho \mathbf{V}_{st} \mathbf{V}_{st} dV. \quad (13)$$

Подставляя сюда выражения (7) и (11), определим коэффициент при $a_k a_{k'}^+ b_q^+$ — амплитуду комбинационного рассеяния звука

$$V_{k,k',q} = BA_k^2 \frac{c}{\rho} \frac{(ek)}{k}. \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{q}$; вектор \mathbf{q} направлен вдоль оси z

$$\Omega \ll \omega = ck.$$

Отметим, что из законов сохранения следует, что $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}'$ и

$$[\mathbf{k}' \Omega] = [\mathbf{k} \Omega].$$

Чтобы вычислить порог комбинационного рассеяния, используем общую формулу для пороговой интенсивности (см., например, [6]):

$$W = \frac{\cos \delta_1 \delta_2}{|V_{k,k',q}|^2}. \quad (15)$$

δ_1, δ_2 — временные коэффициенты затухания звука и геострофической волны ($\delta = \text{Im } \omega$)

$$\delta_1 = \frac{\omega^2}{2\rho c^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right).$$

С помощью формулы (5) имеем

$$\delta_2 = 4\nu \left[\frac{\omega}{c} \sin \frac{\theta}{2} \right]^2 \quad (\theta\text{-угол рассеяния}). \quad (16)$$

После подстановки δ_1 , а также формул (16), (14) в (15) находим порог комбинационного рассеяния на Γ -волне

$$W = 8\eta \left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right) \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \frac{\omega^3}{\rho c \Omega}. \quad (17)$$

Формула (17) применима для случая, когда длина геострофической волны много больше расстояния между вихрями:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \ll \frac{\Omega}{\kappa}. \quad (18)$$

А так как $\nu \ll \kappa$, то из условия (18) автоматически следует условие применимости формулы (5) — $\nu q^2 \ll \Omega$.

Предположим, что мы имеем дело с треугольным расположением вихрей, а рассеяние происходит в плоскости xuz , как изображено на рисунке, б.

Используя общие формулы (9)—(11), (13), (15), находим следующее выражение для пороговой интенсивности в случае рассеяния на Т-волне:

$$W = 4\eta \left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right) (1 + \lambda) \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\omega^2}{\rho c_T} \quad (19)$$

Здесь

$$\lambda = \left(\frac{\rho_s \kappa}{8\pi\rho\nu} \right)^2 \ln \frac{r_m}{l} \text{ (см. (10)); } c_T = \frac{\rho_s}{\rho} \sqrt{\frac{\kappa\Omega}{8\pi}}$$

В заключение приведем численные оценки пороговой интенсивности при $T=1,7$ К, когда вязкость имеет минимум $\nu=0,7 \cdot 10^{-4}$ стокс [7]. Подставляя это значение в формулу (17) и (19), получаем (при $\eta \sim \xi \sim \rho\nu$):

$$W = 1,1 \cdot 10^{-19} \frac{\omega^3}{\Omega} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \text{ Вт/см}^2 \text{ (Г-волна),}$$

$$W = 1,02 \cdot 10^{-13} \frac{\omega^3}{\sqrt{\Omega}} \frac{\rho_n}{\rho_s} (1 + \lambda) \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \text{ Вт/см}^2 \text{ (Т-волна).}$$

При максимально возможной частоте возбуждающего звука $\omega \sim c\sqrt{\Omega/\kappa}$, для которой применимы наши формулы, имеем

$$W_G \sim W_T \sim 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{\Omega} \text{ Вт/см}^2.$$

Полагая $\Omega \sim 10 \text{ с}^{-1}$, получаем

$$W_G \sim W_T \sim 10^{-1} \text{ Вт/см}^2.$$

Для максимально возможной частоты $\omega \sim 10^5 \text{ с}^{-1}$ (когда длина волны звука становится сравнимой с размером сосуда) при том же значении Ω получим

$$W_G \sim 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/см}^2 \text{ и } W_T \sim 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/см}^2.$$

Если температура не слишком близка к 1,7 К, тогда полученные выше оценки увеличатся на порядок, так как вязкость при этом возрастает в несколько раз. Из этого можно заключить, что в диапазоне частот 10^4 — 10^5 с^{-1} можно наблюдать комбинационное рассеяние звука как на геострофической, так и на волне Ткаченко. Причем при низких частотах порог рассеяния на Т-волне значительно выше, чем на Г-волне. Если же длина волны становится равной расстоянию между вихрями, тогда по порядку величины порог одинаков для обоих типов волн.

Таким образом, численные оценки показывают, что пороговая интенсивность комбинационного рассеяния звука на поперечных сверхтекучих волнах — экспериментально достижимая величина. Практическое исследование такого рассеяния могло бы дать сведения о различных свойствах коллективных движений во вращающейся сверхтекучей жидкости.

Идея рассмотрения нелинейного взаимодействия звука с вихревыми колебаниями в сверхтекучих жидкостях принадлежит Рему Викторовичу Хохлову. Работа была выполнена при его жизни, и обсуждение с ним результатов этой работы принесло нам большую пользу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохлов Р. В., Пушкина Н. И. «Письма ЖЭТФ», 1974, 19, 672.
2. Покровский В. Л., Халатников И. М. ЖЭТФ, 1976, 71, 1974.
3. Ткаченко В. К. ЖЭТФ, 1965, 49, 1875.
4. Цкадзе Дж. С., Цкадзе С. Дж. «Успехи физических наук», 1975, 115, 503.
5. Сонин Э. Б. ЖЭТФ, 1976, 70, 1970.
6. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
7. В сб.: «Физика низких температур», гл. X. М., 1969.

МГУ. Кафедра
волновых процессов