

УДК 534.5:621.272.8

**В. В. Канер**  
**О. В. Руденко**

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН  
 КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ  
 В АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ**

**Введение.** Изучение процессов распространения интенсивных звуковых волн в волноводах представляет большой практический интерес. При возбуждении нелинейных колебаний в объемах, ограниченных идеальными стенками, удается избавиться от дифракционных потерь и значительно повысить уровни звукового давления. Это важно как для физических экспериментов по изучению волновых взаимодействий, так и для моделирования работы устройств, использующих турбулентные струйные течения, сопровождаемые излучением интенсивного шума.

Обзор современного состояния проблемы дан в работе [1]. Известные теоретические исследования по распространению волн конечной амплитуды в волноводах посвящены случаю слабого проявления нелинейных искажений, когда форма возмущений далека от пилообразной. Это не позволяет учесть, например, сильное нелинейное затухание ударных волн и оценить предельные значения звуковой энергии, которая может быть передана по волноводу. Такая ситуация связана с отсутствием математического аппарата, сравнимого с методом медленно изменяющегося профиля для бегущих волн. Этот метод был предложен Р. В. Хохловым [2]; на его основе удалось получить уравнение Бюргерса и описать различные взаимодействия сильно искаженных плоских волн. В случае волн, бегущих навстречу друг другу, этот метод, дополненный усреднением уравнений для быстропериодических колебаний, позволил представить стоячие волны в акустическом резонаторе в виде суперпозиции двух встречных волн [3].

Развитый метод и полученные результаты можно применить к проблеме расчета нелинейных полей акустического волновода.

Известно, что нормальные волны в плоском и линейном акустическом волноводе (см., например, [4]) можно представить как участок интерференционной картины, образованной двумя гармоническими волнами равной частоты, распространяющимися под углами  $\pm\theta$  к оси  $x$  (рис. 1). При этом в узловые плоскости  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и т. д. для вертикального компонента скорости частиц среды можно поместить две абсолютно жесткие стенки волновода, не нарушив картины движения. Ширина такого волновода  $2a$  связана с длиной волны соотношением

$$2a \sin \theta = n \lambda / 2, \quad (1)$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda=2\pi c_0/\omega$  — длина звуковой волны вне волновода. В работе [3] показано, что при взаимодействии встречных волн конечной амплитуды в акустическом слое, образованном двумя неподвижными жесткими стенками, узлы для скорости остаются на тех же местах, что и в линейном случае. Поэтому для волн конечной ампли-

туды возможно аналогичное рассмотрение нормальных нелинейных волн в акустическом волноводе как участка интерференционной картины для системы простых волн, бегущих под углами  $\pm\theta$  к его оси. Применение для этого случая метода медленно изменяющегося профиля с последующим усреднением приводит систему гидродинамических уравнений к системе хорошо известных уравнений простых волн, или Бюргерса [5], и позволяет проследить искажение нормальной волны при ее распространении в волноводе.

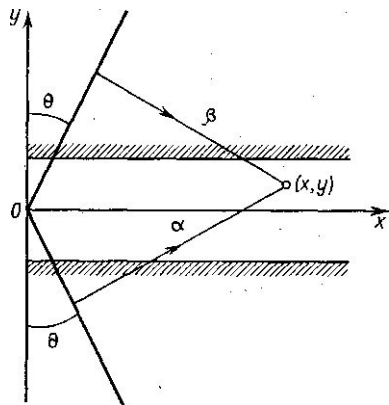


Рис. 1. Узловые плоскости волновода

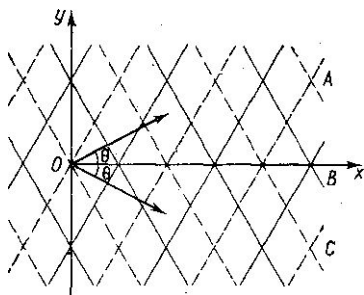


Рис. 2. Простые волны в волноводе

**Вывод упрощенных уравнений.** Двумерные уравнения движения и непрерывности во втором приближении для волн конечной амплитуды в среде без диссипации образуют следующую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= - \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \rho_0 v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho_0 v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{c_0^2}{\rho_0} (\gamma - 1) \rho \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} &= - \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} - \rho_0 v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \rho_0 v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{c_0^2}{\rho_0} (\gamma - 1) \rho \frac{\partial \rho}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho_0$  — приращение плотности и ее невозмущенное значение,  $v_x$  и  $v_y$  — составляющие гидродинамической скорости по осям координат,  $c_0$  — скорость звука. Координата  $x$  совпадает с осью волновода шириной  $2a$ , образованного двумя абсолютно жесткими стенками, координата  $y$  перпендикулярна к стенкам волновода.

В отсутствие нелинейности решение системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} v_x / \cos \theta &= v_1(\eta) + v_2(\xi), \quad v_y / \sin \theta = v_1(\eta) - v_2(\xi), \\ \rho &= \rho_1(\eta) + \rho_2(\xi) = \frac{\rho_0}{c_0} v_x / \cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\eta = t - x \cos \theta / c_0 - y \sin \theta / c_0, \quad \xi = t - x \cos \theta / c_0 + y \sin \theta / c_0, \quad (4)$$

угол  $\theta$  определяется соотношением (1), а  $v_1(\eta)$  и  $v_2(\xi)$  — произвольные периодические возмущения, распространяющиеся без изменения своей формы под углом  $\theta$  к оси  $x$  волновода. При этом

$$\alpha = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \beta = x \cos \theta - y \sin \theta \quad (5)$$

расстояния, проходимые волнами до точки волновода с координатами  $(x, y)$ , если в начальный момент времени фронты волн совпадают с началом координат (рис. 2).

Можно предположить, что при малых нелинейностях решение (2) имеет в основном вид (3), но форма произвольных функций  $v_1, v_2, \rho_1, \rho_2$  медленно меняется по мере распространения волн, т. е. слабо зависит от пройденных расстояний  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} v_x / \cos \theta &= v_1(\eta, \mu\alpha) + v_2(\xi, \mu\beta), \\ v_y / \sin \theta &= v_1(\eta, \mu\alpha) - v_2(\xi, \mu\beta), \\ \rho &= \rho_1(\eta, \mu\alpha) + \rho_2(\xi, \mu\beta), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mu$  — малый параметр. Переходя в уравнениях (2) к координатам  $\eta, \xi, \alpha, \beta$  и пренебрегая членами, порядок которых выше второго, а также заменяя в членах второго порядка малости  $\rho_1$  на  $\frac{\rho_0 v_1}{c_0}$  и  $\rho_2$  на  $\frac{\rho_0 v_2}{c_0}$ , получим после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_2}{\partial \beta} &= \frac{\varepsilon}{c_0^2} \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon + \cos 2\theta}{c_0^2} \left( v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} &= \\ = \frac{2(\varepsilon - 1)}{c_0^2} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{2(\varepsilon - 1 - \sin^2 \theta)}{c_0^2} v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \beta} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} &= \\ = \frac{2(\varepsilon - 1)}{c_0^2} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{2(\varepsilon - 1 - \sin^2 \theta)}{c_0^2} v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2}$ . Так как  $v_1, \rho_1$  и  $v_2, \rho_2$  — быстропериодические функции  $\eta$  и  $\xi$ , то, усредняя систему (7) вначале по  $\xi$ , а затем по  $\eta$ , приходим к уравнениям, позволяющим определить эти функции:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{2-\varepsilon}{c_0^2} \frac{\partial v_1^2}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{2-\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial v_2^2}{\partial \xi}. \quad (9)$$

Таким образом, функции  $v_1$  и  $v_2$  являются решением уравнений (8), вид которых можно определить из граничных условий

$$v_1 = \Phi_1 \left( \eta + \frac{\varepsilon v_1}{c_0} \alpha \right), \quad v_2 = \Phi_2 \left( \xi + \frac{\varepsilon v_2}{c_0} \beta \right). \quad (10)$$

Функции  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определяются из уравнений (9)

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{v_1}{c_0} + (2-\varepsilon)/2c_0^2 v_1^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{v_2}{c_0} + (2-\varepsilon)/2c_0^2 v_2^2, \quad (11)$$

а распространение поля в волноводе можно установить по формулам (6).

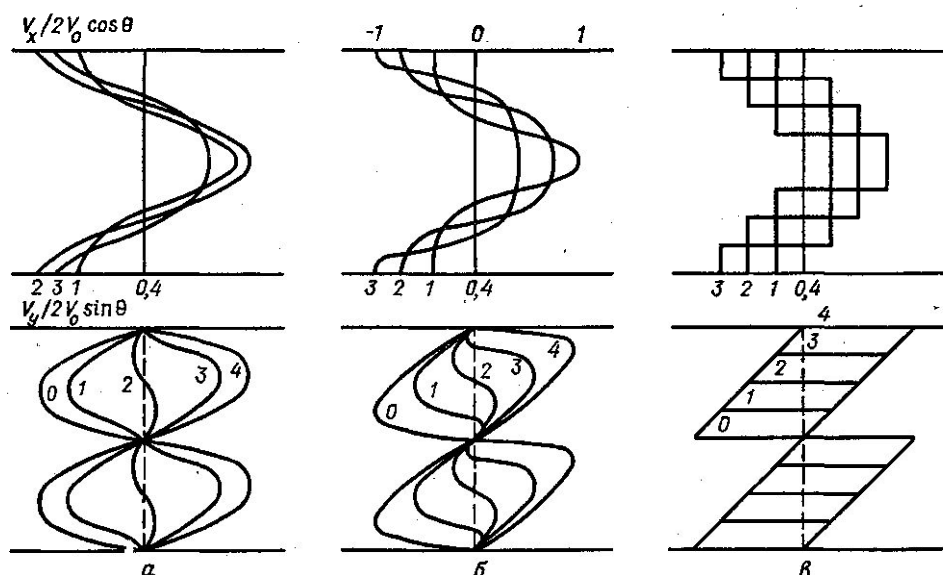


Рис. 3. Распределение горизонтального ( $V_x$ ) и вертикального ( $V_y$ ) компонентов скорости частиц в нелинейном волноводе с жесткими стенками при  $\sigma < 1/2$  (а),  $\sigma \approx 1$  (б) и  $\sigma \sim \pi/2$  (в)

Аналогично [3] отбрасываемые члены в уравнениях второго приближения соответствуют нерезонансному вынуждающему внешнему воздействию, и нелинейные эффекты, связанные с ними, во времени и пространстве не накапливаются. При этом возможное рассеяние звука на звуке при пересечении плоских волн также относится к числу не накапливающихся эффектов.

**Нелинейные нормальные волны акустического волновода.** Пусть при  $\alpha=0$  и  $\beta=0$  заданы граничные условия обычного синусоидального вида

$$v_1 = v_0 \sin \omega t, \quad v_2 = v_0 \sin \omega t, \quad (12)$$

где  $\omega = 2\pi c_0/\lambda$  удовлетворяет условию (1). Такому граничному режиму соответствуют две бесконечные колеблющиеся полуплоскости, совпа-

дающие с началом координат и составляющие угол  $\pm\theta$  с осью  $y$  (см. рис. 2). Изучаемые ими волны определяют картину звукового поля в правой полуплоскости  $(x, y)$ , частью которого является поле в волноводе. В линейном волноводе аналогичному режиму соответствуют жесткие стенки в узловых плоскостях  $A$  и  $C$  на рис. 1, и четное значение  $n$  в (1). В дальнейшем для определенности примем  $n=2$ .

Решение (10) с граничными условиями (12) определяет в неявном виде функции  $v_1$  и  $v_2$ :

$$v_1 = v_0 \sin(\omega\eta + \sigma_1 v_1/v_0), \quad v_2 = v_0 \sin(\omega\xi + \sigma_2 v_2/v_0), \quad (13)$$

где  $\sigma_{1,2} = \frac{\varepsilon v_0}{c_0^2} (x \cos \theta \pm y \sin \theta)$  — параметры, характеризующие степень проявления нелинейных эффектов в среде. Для оси волновода

$$\sigma_x = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\varepsilon v_0}{c_0^2} \sqrt{\omega^2 - (\pi n c_0 / 2a)^2} x.$$

Каждая из волн (13) является простой волной, нелинейные искажения в которой накапливаются по мере ее распространения по волноводу. При  $\sigma=1$  в профиле каждой волны появится неоднозначность, соответствующая образованию разрыва. Этому значению  $\sigma$  соответствует точка на оси волновода

$$x_p = \left( \frac{\varepsilon v_0}{c_0^2} \sqrt{\omega^2 - (\pi n c_0 / 2a)^2} \right)^{-1}. \quad (14)$$

С увеличением частоты для данного значения  $n$  разрыв образуется на меньших отрезках волновода. Наоборот, при увеличении номера  $n$  нормальной волны для фиксированной частоты длина образования разрыва возрастает, и при  $n = \frac{2a\omega}{\pi c}$  разрыв в распространяющихся волнах не образуется. Этому режиму соответствуют синфазные колебания волновода по всей его длине, и волна, как и в линейном случае, не распространяется вдоль волновода. При таких колебаниях  $\sigma_y = \frac{\varepsilon v_0}{c_0} \frac{\pi n y}{2a}$  и разрыв тоже может образоваться в стоячих волнах при условии

$$\frac{\varepsilon v_0}{c_0} \pi n > 1 \quad \left( \text{или} \quad \frac{\varepsilon v_0 2a \omega}{c_0^2} > 1 \right).$$

При  $\omega \gg \frac{\pi n c}{2a} = \omega_{\text{критич}}$  по всему сечению волновода параметр  $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_x$  и поперечное распределение  $v_x$  и  $v_y$  в заданном сечении можно получить из (6), записав (13) в виде, удобном для графического анализа

$$\begin{aligned} \frac{\pi n y}{2a} &= -\arcsin \frac{v_1}{v_0} + \sigma \frac{v_1}{v_0} + \left( \omega t - \frac{\omega x}{c_0} \cos \theta \right), \\ \frac{\pi n y}{2a} &= \arcsin \frac{v_2}{v_0} - \sigma \frac{v_2}{v_0} - \left( \omega t - \frac{\omega x}{c_0} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Для  $\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_0}\right) = 0$ , производя графически сложение и вычитание функций  $v_1$  и  $v_2$ , получаем мгновенное распределение  $v_x$  и  $v_y$  по  $y$  в данном сечении  $x$  при определенном значении параметра  $\sigma$ . С течением времени график для  $v_1$  смещается вверх, а для  $v_2$  — вниз; таким образом можно получить распределение компонентов скорости в различные

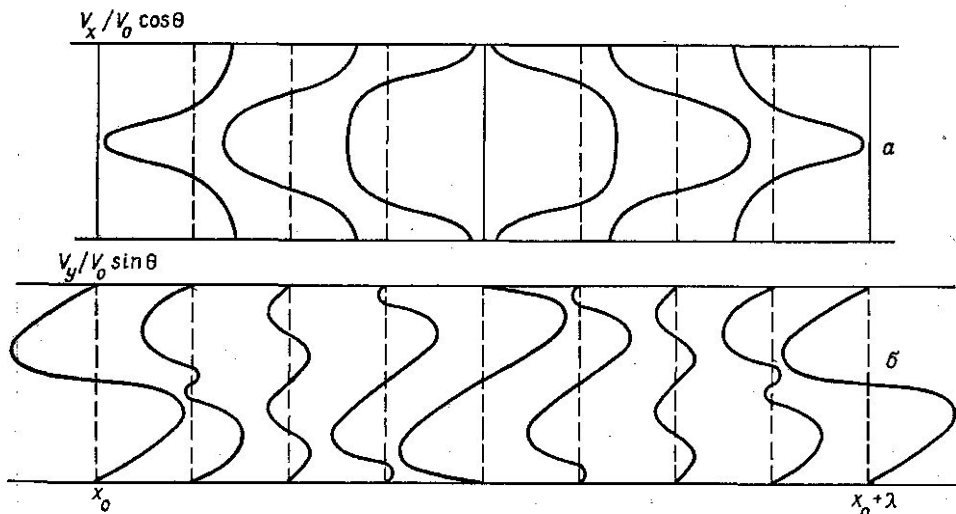


Рис. 4. Распределение компонентов скорости частиц в нелинейном волноводе для  $V_x$  (а) и для  $V_y$  (б)

моменты времени в течение одного периода колебаний. При изменении  $x$  в пределах одной длины волны в волноводе параметр  $\sigma$  меняется мало, и распределение компонентов скорости  $v$  получается при смещении графика для  $v_1$  вниз, а для  $v_2$  — вверх. При больших изменениях  $x$  та же процедура проделывается для существенно различных  $\sigma$ .

На рис. 3 изображены полученные таким образом распределения  $V_x$  и  $V_y$  в различных сечениях волновода, построенные через равные интервалы времени  $\Delta t = T/8$  (для  $n=2$ ). При малых значениях  $\sigma$  распределение по  $y$  почти такое же, как и в линейном случае. При больших  $\sigma$  рост высоких гармоник на нелинейности делает стоячие волны почти пилообразными с дополнительным бегающим узлом, соответствующим бегущему разрыву в случае образовавшейся разрывной волны (рис. 3, в).

Распределение компонентов скорости по сечению представлено на рис. 4 при изменении в пределах одной длины волны в волноводе (для одного и того же момента времени) при значении приведенного расстояния  $\sigma \sim 1$ . Видно, что при этом на оси волновода и у стенок возникают большие градиенты горизонтальной составляющей скорости частиц среды, заполняющей волновод.

При  $\sigma > \pi/2$  амплитуда разрыва в каждой волне уменьшается из-за быстрого поглощения высших гармоник по асимптотической формуле

$$\frac{v_p}{v_0} = \pi(1 + \sigma), \tag{16}$$

однако детальное исследование структуры разрывов в волноводном поле волн требует учета диссипации.

Функции тока (поле скоростей в нелинейном волноводе) существенно искажаются по мере распространения волны. Мало отличающиеся от распределения поля скоростей в линейном волноводе при небольших  $x$  (рис. 5, а), они становятся разрывными на линиях движения фронта ударной волны (рис. 5, б), при  $x \approx x_p$ .

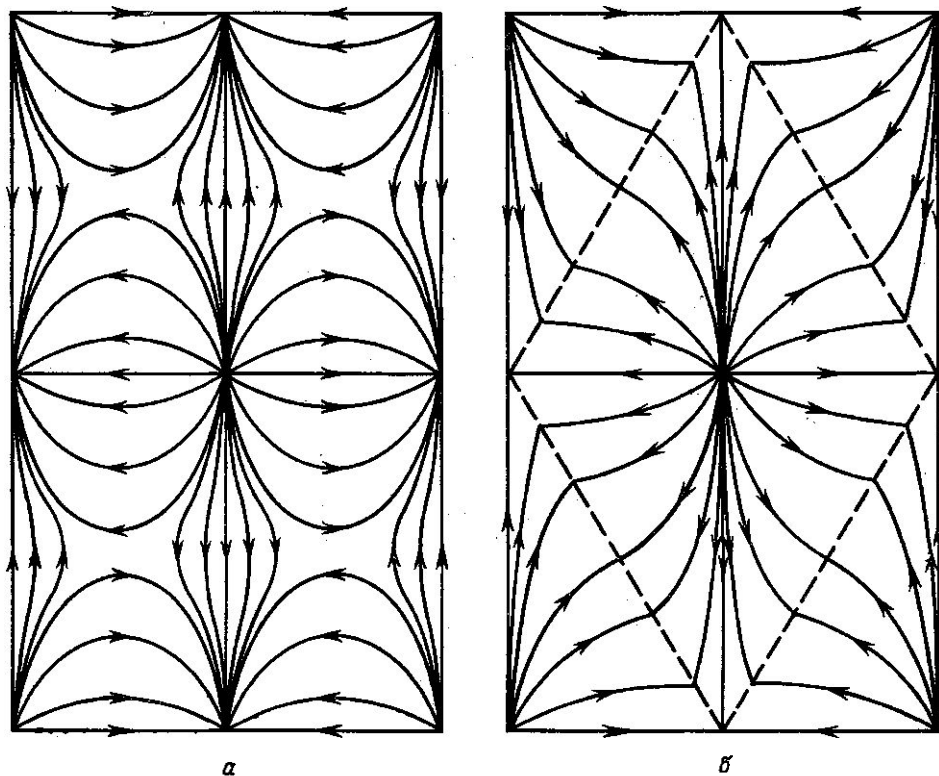


Рис. 5. Поле скоростей частиц (функции тока) в нелинейном волноводе при малых  $\sigma$  (а) и при  $\sigma \sim \pi/2$  (б)

На основании решений (8) анализ распространяющихся в волноводе потоков энергии и его добротности может быть произведен, как в работе [3].

Предложенная методика расчета нелинейных нормальных волн применима для изучения нелинейных полей и в поглощающих волноводах, а также для других типов граничных условий и видов стенок волновода. Так как волновод представляет систему с дисперсией, можно надеяться на избирательный характер процессов при взаимодействиях нелинейных нормальных волн в акустических волноводах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nayfeh A. H., Kaiser J. E. Nonlinear wave propagation in ducts. 7-th Intern. Symp. on Nonlinear Acoustics, p. 198—201. USA, Blacksburg, 1976.

2. Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», 1961, 6, 917—925.
3. Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В. «Акустический журнал», 1977, 23, 5, 756—765.
4. Исакович М. А. Общая акустика. М., 1973.
5. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975.

МГУ. Кафедра  
волновых процессов