

УДК 537.874

Ю. Н. Карамзин
А. П. Сухоруков
Т. С. Филипчук

О НОВОМ КЛАССЕ СВЯЗАННЫХ
СОЛИТОНОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ
СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

При изучении различных нелинейных волновых процессов в диспергирующих средах особое место занимают исследования солитонов, структура которых не искажается в процессе распространения.

В линейной среде волновой пакет (квазимонохроматическая волна) испытывает дисперсионное расплывание. Если это расплывание может быть подавлено каким-либо нелинейным механизмом, то волновые пакеты могут распространяться в диспергирующей среде в виде солитонов. Хорошо известно, что таким механизмом является самовоздействие волн, связанное с кубичной нелинейностью (и высшими нелинейностями нечетных порядков). Вследствие самовоздействия в нелинейной среде может возникать эффект самокомпрессии импульсов, который при определенных условиях может уравновесить дисперсионное расплывание, в результате чего и образуются солитоны [1]. Это явление полностью аналогично волноводному распространению ограниченных волновых пучков в самофокусирующих средах (см. обзор [2]). Однако механизм нелинейного изменения показателя преломления не является единственным для образования солитонов.

В 1974—1975 гг. был впервые рассмотрен совершенно новый класс солитонов, формирующихся в среде с квадратичной нелинейностью при когерентном трехволновом взаимодействии [3, 4]. Физика этого явления кратко заключается в следующем. Синхронное взаимодействие трех импульсов в общем случае носит как активный, так и реактивный характер. Активный характер взаимодействия связан с перекачкой энергии и изменением амплитуд, а реактивный — с нелинейным изменением фазовых скоростей взаимодействующих волн. Причем в зависимости от соотношения фаз всех волн процесс взаимодействия может стать либо активным, либо реактивным. Существование связанных солитонов в среде с квадратичной нелинейностью обусловлено реактивным характером их взаимодействия — коллективным самовоздействием. Таким образом, если в кубично-нелинейной среде речь шла об одиночных солитонах, то в квадратично-нелинейной среде мы имеем дело с тремя (в вырожденном по частоте случае — с двумя) связанными солитонами. Подчеркнем, что в первом приближении теории дисперсии, учитывающем групповое запаздывание волн без дисперсии групповых скоростей, существование таких солитонов принципиально невозможно.

Можно говорить лишь о рассеянии трех солитонов друг на друге, не приводящем к перераспределению энергии между волнами [5].

В [6, 7] были доказаны теоремы существования связанных солитонов, причем в ходе доказательства был дан алгоритм нахождения амплитудно-фазовых профилей солитонов.

В настоящей работе дается классификация различных типов трехволновых солитонов, обсуждаются некоторые их общие свойства и условия samozaxвата импульсов в связанные солитоны.

Уравнения для медленно-меняющихся амплитуд волновых пакетов и законы сохранения. Во втором приближении теории дисперсии когерентное взаимодействие трех импульсов с частотами $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ в квадратично-нелинейной среде описывается системой уравнений [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial E_1}{\partial \eta} + iD_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial \eta^2} &= -i\gamma_1 E_3 E_2^*, \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} + v_2 \frac{\partial E_2}{\partial \eta} + iD_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial \eta^2} &= -i\gamma_2 E_3 E_1^*, \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} + v_3 \frac{\partial E_3}{\partial \eta} + iD_3 \frac{\partial^2 E_3}{\partial \eta^2} - i\Delta E_3 &= -i\gamma_3 E_1 E_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $E_j = |E_j| e^{i\varphi_j}$ — медленно-меняющиеся комплексные амплитуды волновых пакетов,

$$E = \sum_{j=1}^2 E_j \exp i(\omega_j t - k_j z) + E_3 \exp i(\omega_3 t - k_1 z - k_2 z) + \text{к. с.},$$

$\Delta = k_1 + k_2 - k_3$ — расстройка средних волновых чисел, $v_j = \frac{1}{u_j} - \frac{1}{u}$ — расстройка обратных волновых величин групповых скоростей, $D_j = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2}$ — коэффициент дисперсионного расплывания, $\gamma_j = \frac{2\pi\chi\omega_j}{cn_j}$ —

коэффициент нелинейности, z — координата, отсчитываемая вдоль направления распространения волн, $\eta = t - z/u$ — местное время в системе отсчета.

Уравнения (1) можно привести к гамильтоновой форме

$$\frac{\partial E_j}{\partial z} = -i\gamma_j \frac{\delta I_3}{\delta E_j^*}$$

с сохраняющимися гамильтонианом

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2\text{Re}(E_1 E_2 E_3^*) + \frac{\Delta}{\gamma_3} |E_3|^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^3 \left[\frac{D_j}{\gamma_j} \left| \frac{\partial E_j}{\partial \eta} \right|^2 - \text{Im} \frac{v_j}{\gamma_j} E_j^* \frac{\partial E_j}{\partial \eta} \right] \right\} d\eta, \end{aligned} \quad (2)$$

импульсом

$$I_2 = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\gamma_j} E_j \frac{\partial E_j^*}{\partial \eta} d\eta$$

и плотностью энергии

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |E_j|^2 d\eta.$$

Эти инварианты определяют качественное поведение волновых пакетов в нелинейной диспергирующей среде.

Трехчастотные параметрически связанные солитоны. Для того чтобы импульсы вошли в стационарный (солитонный) режим взаимодействия, они должны иметь определенные начальные профили амплитуды и фазы. Очевидно, что, войдя в такой режим взаимного захвата, они будут двигаться с некоторой общей групповой скоростью и можно говорить об образовании сложного трехчастотного солитона. В [6, 7] доказано, что уравнения (1) имеют решения в виде стационарных волн, распространяющихся без деформации профилей, которые можно записать следующим образом:

$$E_j = E_{jc}(\eta_c) \exp(-i\Gamma_j z + i\Omega_j \eta_c); \quad \Omega_j = \frac{1}{2D_j} \left(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_c} \right). \quad (3)$$

Здесь $\eta_c = t - z/u_c$, Γ_j — нелинейные добавки к волновым числам, связанные соотношением $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3$, u_c — групповая скорость солитонов; для удобства в формуле (3) выделен экспоненциальный множитель, соответствующий сдвигу средних частот импульсов на Ω_j (при этом в уравнения для комплексных амплитуд солитонов $E_{jc}(\eta_c)$ не входят первые производные):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{1c}}{d\eta_c^2} - \alpha_1 E_{1c} &= -\frac{\gamma_1}{D_1} E_{3c} E_{2c}^* e^{-i\Omega \eta_c}, \\ \frac{d^2 E_{2c}}{d\eta_c^2} - \alpha_2 E_{2c} &= -\frac{\gamma_2}{D_2} E_{3c} E_{1c}^* e^{-i\Omega \eta_c}, \\ \frac{d^2 E_{3c}}{d\eta_c^2} - \left(\alpha_3 + \frac{\Delta}{D_3} \right) E_{3c} &= -\frac{\gamma_3}{D_3} E_{1c} E_{2c} e^{i\Omega \eta_c}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_j = \Gamma_j/D_j - \Omega_j^2$, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3$; E_{jc} удовлетворяют естественным красивым условиям $\lim_{\eta_c \rightarrow \pm\infty} |E_{jc}(\eta_c)| = 0$.

Стационарные решения уравнений (4) вида $E_{jc} = \text{const}$, описывающие нормальные волны в нелинейной среде, впервые были исследованы Р. В. Хохловым [9]. Решения системы (4) зависят от трех параметров — Γ_1 , Γ_2 и Ω , характеризующих фазовые скорости солитонов и их общую групповую скорость.

Рассмотрим некоторые общие свойства солитонов. Прежде всего обращают на себя внимание солитоны с действительными огибающими $E_{jc}(\eta_c)$, существование которых возможно лишь при выполнении условия $\Omega = 0$. Из последнего соотношения однозначно определяется групповая скорость солитонов

$$u_c = \frac{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_3}}{\frac{1}{D_1 u_1} + \frac{1}{D_2 u_2} - \frac{1}{D_3 u_3}}. \quad (5)$$

Оказывается, что именно среди таких солитонов (назовем их специальными) находятся солитоны, обеспечивающие минимум гамильтониана I_3 при фиксированных значениях интегралов Мэнли — Роу

$$I_{1j} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|E_j|^2 + \frac{\gamma_j}{\gamma_3} |E_3|^2 \right) d\eta \quad (j = 1, 2)$$

и, следовательно, при любом суммарном потоке энергии I_1 . Действительно, уравнение Эйлера $\delta(I_3 + \mu_1 I_{11} + \mu_2 I_{12}) = 0$ совпадает с уравнениями (4) для солитонов с $\Gamma_1 = \mu_1 \gamma_1$, $\Gamma_2 = \mu_2 \gamma_2$, так что все стационарные точки функционала $I_3 + \mu_1 I_{11} + \mu_2 I_{12}$ содержатся среди решений системы (4). Кроме того, при фиксированных профилях импульсов строгому минимуму I_3 соответствует линейная фазовая модуляция волн

$$\varphi_j^c(\eta_c, z) = \frac{\frac{1}{D_1} \left(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_1} \right) + \frac{1}{D_2} \left(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_2} \right) - \frac{1}{D_3} \left(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_3} \right)}{2D_j \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_3} \right)} \eta_c - \Gamma_j z, \quad (6)$$

т. е. $I_3(B_j, \varphi_j) > I_3(B_j, \varphi_j^c)$, если $\varphi_j \neq \varphi_j^c$.

Если для импульсов на некоторых частотах соотношения между D_j и u_j таковы, что u_c равна нулю или стремится к бесконечности, то образование специальных солитонов невозможно. Но, как показывают численные эксперименты, при определенных условиях импульсы при любых параметрах задачи захватываются в квазисолитоны, распространяющиеся с конечной групповой скоростью.

В случае, когда для одной из волн коэффициент дисперсионного расплывания равен нулю, система (4), определяющая стационарные огибающие, сводится к двум уравнениям. Если, например, $D_3 = 0$, то из (4) видно, что солитоны могут распространяться только с групповой скоростью импульса на суммарной частоте ($u_c = u_3$). Тогда уравнения для E_{1c} и E_{2c} принимают вид

$$\left(E_{3c} = \frac{\gamma_3}{\Gamma_3 + \Delta} E_{1c} E_{2c}, \Omega_{1,2} = \frac{1}{2D_{1,2}} \left(\frac{1}{u_{1,2}} - \frac{1}{u_3} \right), \Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_2 \right):$$

$$\frac{d^2 E_{1c}}{d\eta_3^2} - \alpha_1 E_{1c} = - \frac{\gamma_1 \gamma_3}{(\Gamma_3 + \Delta) D_1} E_{1c} |E_{2c}|^2, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 E_{2c}}{d\eta_3^2} - \alpha_2 E_{2c} = - \frac{\gamma_2 \gamma_3}{(\Gamma_3 + \Delta) D_2} E_{2c} |E_{1c}|^2.$$

При этом происходит своеобразное перекрестное воздействие волн с частотами ω_1 и ω_2 . Нелинейные правые части в (7) аналогичны реактивным членам в уравнениях параметрического взаимодействия волн в средах с кубичной нелинейностью.

При вырожденном трехчастотном взаимодействии ($E_1 = E_2$) уравнение для E_{1c}

$$\frac{d^2 E_{1c}}{d\eta_3^2} - \alpha_1 E_{1c} = - \frac{\gamma_1^2}{(2\Gamma_1 + \Delta) D_1} E_{1c} |E_{1c}|^2$$

имеет тот же вид, что и хорошо известное уравнение в теории солитонов и двумерных волноводов в кубично-нелинейной среде [1, 2].

Доказательство существования трехчастотных солитонов, предложенное в [6, 7], легко может быть превращено в алгоритм для численного определения структуры основных мод солитонов. В качестве при-

мера на рис. 1 и 2 приведены рассчитанные этим методом амплитудные профили специальных солитонов для случая вырожденного взаимодействия импульсов на основной (ω) и удвоенной (2ω) частотах, а также профили интенсивности и фазы солитонов с отличной от (5) групповой скоростью.

Рис. 1. Нормированные профили интенсивности связанных солитонов, распространяющихся без фазовой модуляции, в вырожденном случае ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2, \gamma_j = \gamma$) на частоте ω_1 (кривые 1) и на частоте ω_3 (кривые 2), пунктирные линии

$$\frac{\alpha_3 + \Delta/D_3}{\alpha_1} = 0,5, \text{ сплошные } - \frac{\alpha_3 + \Delta/D_3}{\alpha_1} = 9;$$

$$A_{jc}(\sqrt{\alpha_1} \eta_c) = \frac{\alpha_1}{i\gamma} \sqrt{\frac{D_1^2 D_3}{D_j}} E_{jc}(\sqrt{\alpha_1} \eta_c)$$

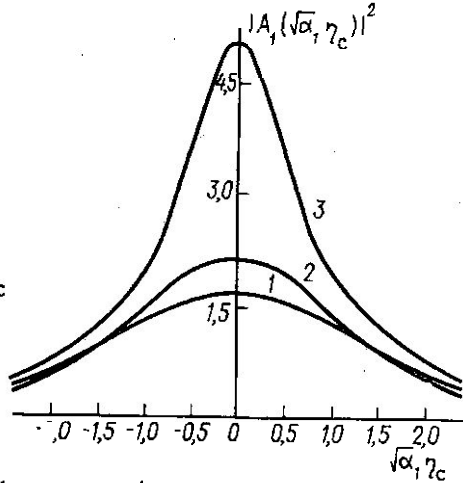
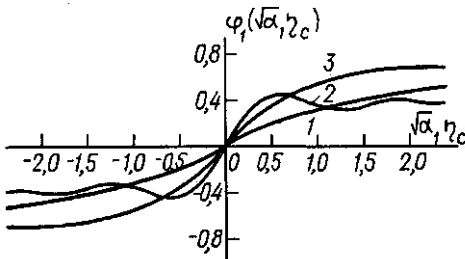
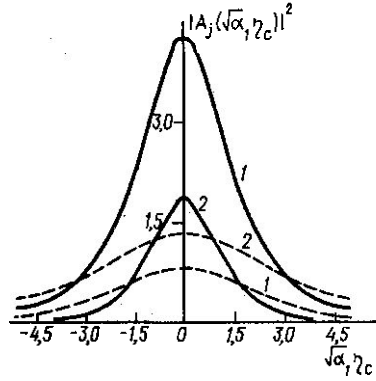


Рис. 2. Нормированные амплитудные и фазовые профили солитона на частоте $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ при $\Omega \neq 0, \frac{\alpha_3 - \Delta/D_3}{\alpha_1}$: 1 — 1, 2 — 2 и 3 — 5

Формирование и проблема устойчивости солитонов. В общем случае можно говорить о взаимном захвате импульсов, когда при распространении в среде максимальные амплитуды волн ограничены не зависящей от z константой, что означает невозможность распада электромагнитного поля на невзаимодействующие волновые пакеты.

Величина интегралов движения I_1 и I_3 позволяет найти интервалы изменения максимумов амплитуд волновых пакетов $M_j(z) = \max_{\eta} |E_j(\eta, z)|$. Они определяются неравенствами (верхний и нижний знаки соответствуют положительным и отрицательным D_j)

$$-\frac{1}{4} \frac{|D_j|}{\gamma_j I_j^2} M_j^4 + M_j > \mp \frac{I_3}{I_1} - \max_i \frac{v_i^2}{4\gamma_i |D_j|} - \frac{|\Delta| \mp \Delta}{2\gamma_3}. \quad (8)$$

Максимумы амплитуд волн могут колебаться в пределах $M_j^{\min} < M_j < M_j^{\max}$, где

$$M_j^{\min} = \frac{M_j^0 q_j}{\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{q_j^3} - 1} \right),$$

$$M_j^{\max} = \frac{M_j^0 q_j}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{q_j^3} - 1} \right),$$

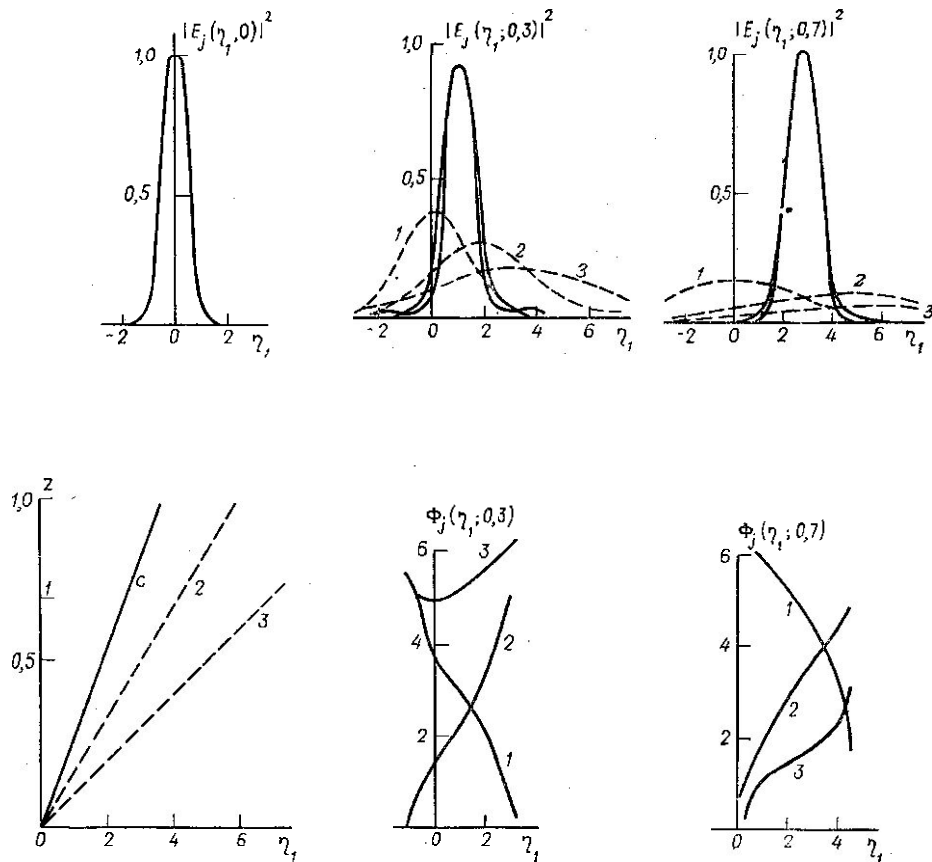


Рис. 3. Самозахват трех импульсов в квазисолитоны. Показано изменение обгибающих импульсов с расстоянием, пройденным в нелинейной среде: $\gamma_1=15$, $\gamma_2=20$, $\gamma_3=35$; $\nu_1=0$, $\nu_2=6$, $\nu_3=10$; $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=5$. В линейной среде (пунктирные линии) импульсы испытывали бы дисперсионное распыление и двигались с различными групповыми скоростями. Изображены также траектории движения вершин импульсов со средними частотами ω_1 (1), ω_2 (2) и ω_3 (3) в линейной среде и в режиме самозахвата (с)

$$M_j^0 = \sqrt[3]{\frac{\gamma_j I_1^2}{|D_j|}},$$

$$q_j = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{4C}{3M_j^0}\right)^3}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4C}{3M_j^0}\right)^3}}^{1/2},$$

$$C = \pm I_2/I_1 - \max_j (v_j^2/4\gamma_j |D_j|) - (|\Delta| \mp \Delta)/2\gamma_3.$$

Так как минимумы пиковых значений амплитуд M_j^{\min} больше величины, стоящей в правых частях неравенств (8), то в качестве до-

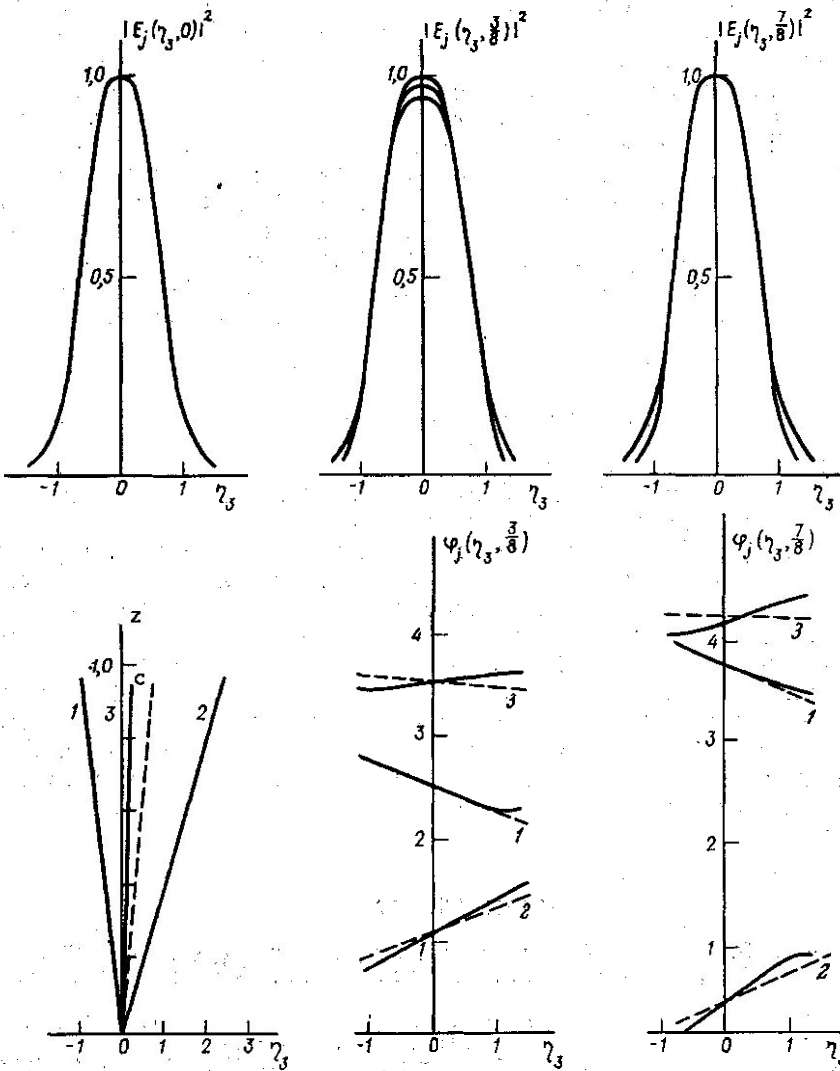


Рис. 4. Самозахват трех импульсов в квазисолитоны при $\gamma_1=15$, $\gamma_2=20$, $\gamma_3=35$, $v_1=-1$, $v_2=3$, $v_3=0$, $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=5$. Импульсы близки к специальным солитонам, которым соответствуют пунктирные линии

статочного условия взаимного самозахвата волновых пакетов можно использовать неравенство

$$\mp \frac{I_3}{I_1} - \max_j \frac{v_j^2}{4\gamma_j |D_j|} - \frac{|\Delta| \mp \Delta}{2\gamma_3} > 0. \quad (9)$$

Процесс формирования квазисолитонов при выполнении условия (9) иллюстрируют результаты численных экспериментов, основанных

на решении системы (1). На рис. 3 и 4 изображены последовательные этапы распространения трех волновых пакетов с начальными гауссовыми профилями $E_i(\eta, 0) = E_{i0} \exp(-\eta^2/\tau^2)$.

Показаны профили интенсивности и фазы связанных импульсов, а также фазовые профили специальных солитонов.

Для сравнения приведены амплитудные профили импульсов на той же длине при их распространении в линейной среде. Представлен также график, определяющий движение вершин параметрически связанных волновых пакетов. Из рисунков видно, что общая групповая скорость захваченных импульсов может быть близка к вычисленной по формуле (5) скорости специальных солитонов (которым соответствует траектория, отмеченная пунктиром). Это имеет место в тех случаях, когда определенная таким образом скорость u_c имеет некоторое среднее по отношению к групповым скоростям u_j значение. При численном решении уравнений (1) входящие в них величины приводились к безразмерному виду нормированием на толщину нелинейного слоя, пиковую амплитуду и длительность одного из импульсов, так что

$$\eta^6 = \eta/\tau, \quad z^6 = z/L, \quad D_j^6 = D_j L/\tau^2, \\ v_j^6 = v_j L/\tau, \quad \gamma_j^6 = \gamma_j E_0 L, \quad E_j^6 = E_j/E_0$$

(на рисунках индексы опущены).

Пределы возможных колебаний максимумов амплитуд волн определяются величинами I_3 , I_1 и значениями параметров, входящих в уравнения (1). Конечность этих интервалов при выполнении условия (9) позволяет в каком-то смысле говорить об устойчивости солитонов. Для строгого решения задачи нужно исследовать устойчивость солитонов по Ляпунову. При этом в качестве функции Ляпунова можно взять интеграл $I_3 = \text{const}$. Ранее уже отмечалось, что при фиксированных амплитудных профилях солитонов строгий минимум I_3 достигается на специальных солитонах. Таким образом, можно говорить об устойчивости специальных солитонов относительно возмущений фаз. Более того, можно показать, что специальные солитоны устойчивы по отношению к возмущениям произвольного вида, не меняющим энергии импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973.
2. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. «Успехи физических наук», 1967, 93, 19.
3. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. «Письма в ЖЭТФ», 1974, 1, 737.
4. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. ЖЭТФ, 1975, 68, 834.
5. Захаров В. Е., Мананов С. В. Препринт ИЯФ СОАН СССР, 74—41, 1974.
6. Карамзин Ю. Н., Филипчук Т. С. ПМТФ, 1977, 1, 47.
7. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филипчук Т. С. «Изв. вузов. Радиофизика», 1978, 3.
8. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филипчук Т. С. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, 101.
9. Хохлов Р. В. Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений и его применение к проблемам радиофизики. Докторская диссертация. М., 1961.

МГУ. Кафедра
Общей физики и волновых процессов