

УДК 534.222.2

В. А. Красильников  
Е. Я. ТагуновО НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ  
КОЛЛИНЕАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ  
БЕЗ ДИСПЕРСИИ

В последнее время внимание многих авторов привлекает вопрос о нелинейном взаимодействии слабых гармонических сигналов с интенсивным шумом. В работах [1—4], посвященных изучению процесса взаимодействия монохроматических и шумовых волн, показано, что такое взаимодействие в нелинейной среде без дисперсии может быть причиной значительного дополнительного затухания звукового сигнала. Вместе с тем для объяснения многих особенностей этого процесса необходимо более детальное изучение нелинейного взаимодействия плоских монохроматических волн. Отдельные аспекты данной задачи неоднократно рассматривались в отечественной и зарубежной литературе. Однако достаточно подробный анализ нелинейного взаимодействия слабой и интенсивной монохроматических ультразвуковых волн, который необходим для выявления некоторых закономерностей распространения слабых ультразвуковых сигналов при наличии в среде мощных низкочастотных шумовых возмущений, по существу отсутствует. Именно этому вопросу и посвящено данное сообщение.

Пусть на входе в нелинейную среду задано возмущение в виде

$$U(0, t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (1)$$

порождающее две коллинеарные волны, взаимодействующие между собой в процессе распространения. Все теоретические расчеты будем проводить на основе уравнения Бюргерса, описывающего процесс распространения возмущений в вязкой теплопроводящей среде с квадратичной нелинейностью:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

где  $U$  — колебательная скорость,  $x$  — расстояние,  $c_0$  — скорость звука,  $\tau = t - \frac{x}{c_0}$ ,  $\varepsilon$  — нелинейный и  $b$  — диссипативный параметры.

На первом этапе исследования вполне естественно ограничиться изучением динамики изменения амплитуд волн только основных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , суммарной  $\omega_1 + \omega_2$  и разностной  $\omega_1 - \omega_2$  частот. При этом наиболее простые аналитические результаты, дающие при определенных условиях достаточно хорошее качественное описание процесса, можно получить уже в рамках трехчастотного приближения. Для этого необходимо предположить, что в процессе коллинеарного взаимодействия эффективно генерируется волна либо только разностной, либо

только суммарной частоты, т. е. приближенное решение уравнения (2) при наличии граничных условий (1) ищется в виде:

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 [A_k(x) e^{i\omega_k \tau} + \text{к. с.}], \quad (3)$$

где  $A_k(x) = B_k(x) e^{i\delta_k(x)}$  — комплексные амплитуды, изменяющиеся по мере распространения волн в среде, а  $\omega_3$  полагается равным  $\omega_1 + \omega_2$  либо  $\omega_1 - \omega_2$ . Укороченные уравнения для этого приближения получены в [5], где решается подобная задача и подробно рассматривается случай, наиболее интересный с точки зрения параметрического усиления, когда в среду, по которой распространяется слабая волна  $\omega_1$ , вводится мощная волна накачки на частоте  $\omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ). Наиболее просто эта задача решается в приближении заданного поля, когда можно пренебречь влиянием взаимодействия на саму волну накачки и ее истощением за счет генерации собственных гармоник. В этих предположениях в [5] получены выражения для амплитуд волн  $\omega_1$  и  $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$  (без учета диссипации)

$$B_1(x) = B_1(0) \operatorname{ch} \gamma x,$$

$$B_3(x) = \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1}} B_1(0) \operatorname{sh} \gamma x, \quad (4)$$

где

$$\gamma = \frac{\varepsilon A_0}{2c_0^2} \sqrt{\omega_1 \omega_3}, \quad (5)$$

$$A_0 \equiv A_2(x) = \text{const.}$$

При этом  $S_1 + S_3 = \frac{\pi}{2}$ , ( $S_2 = 0$ ).

Для нас, однако, интересен другой случай, когда в нелинейной среде происходит взаимодействие слабой высокочастотной волны  $\omega_1$  с мощной низкочастотной волной  $\omega_2$ . Если ограничиться приближением заданного поля, считая в (3)  $A_2(x) = \text{const} = A_0$  (правомерность этого шага мы обсудим ниже), и воспользоваться укороченными уравнениями трехчастотного приближения из [5], то можно получить простые выражения для амплитуд, интересующих нас волн  $\omega_1$  и  $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ . При этом в отличие от (4) вид решения существенным образом зависит от значения параметра

$$\xi = \frac{|\Delta - \delta|}{2\gamma}, \quad \text{где } \delta = \frac{b\omega_1^2}{2\rho_0 c_0^3}, \quad \Delta = \frac{b(\omega_1 \pm \omega_2)^2}{2\rho_0 c_0^3}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon A_0}{2c_0^2} \sqrt{\omega_1(\omega_1 \pm \omega_2)}.$$

При  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \gg 1$  получаем  $\xi \approx \frac{1}{2\varepsilon \operatorname{Re}_2}$ , где  $\operatorname{Re}_2 = \frac{\rho_0 c_0 A_0}{b\omega_2}$  — число Рейнольдс-

са для волны  $\omega_2$ .

Здесь и далее верхний знак соответствует случаю, когда учиты-

вается генерация только суммарной частоты, нижний — только разностной. Итак;  
при  $\xi < 1$

$$B_1(x) = B_1(0) \frac{e^{-\frac{\delta+\Delta}{2}x}}{a} \cos(a\gamma x \pm \varphi), \quad (6)$$

$$B_3(x) = \pm B_1(0) \sqrt{\frac{\omega_1 \pm \omega_2}{\omega_1}} \frac{e^{-\frac{\delta+\Delta}{2}x}}{a} \sin a\gamma x,$$

где  $\varphi = \arcsin \xi$ ,  $a = \sqrt{1 - \xi^2}$ ;  
при  $\xi = 1$

$$B_1(x) = B_1(0) e^{-\frac{\delta+\Delta}{2}x} (1 \mp \gamma x), \quad (7)$$

$$B_3(x) = \pm \frac{\varepsilon B_1(0) A_0(\omega_1 \pm \omega_2) x}{2\epsilon_0^2} e^{-\frac{\delta+\Delta}{2}x};$$

при  $\xi > 1$

$$B_1(x) = B_1(0) e^{-\frac{\delta+\Delta}{2}x} \left[ \operatorname{ch} b\gamma x \mp \frac{\xi}{b} \operatorname{sh} b\gamma x \right], \quad (8)$$

$$B_3(x) = B_1(0) \frac{e^{-\frac{\delta+\Delta}{2}x}}{b} \operatorname{sh} b\gamma x,$$

где  $b = \sqrt{\xi^2 - 1}$ .

Наиболее интересен случай  $\xi < 1$ , когда нелинейные эффекты проявляются особенно сильно. Отметим, что вследствие интенсивного обмена энергией между взаимодействующими волнами амплитуды  $B_1(x)$  и  $B_3(x)$  осциллируют в пространстве.

Более корректный анализ взаимодействия должен, конечно, учитывать одновременное образование волн как разностной и суммарной частот, так, вообще говоря, и других комбинационных частот. Однако, поскольку амплитуды волн комбинационных частот, отличных от суммарной и разностной, существенно меньше последних, можно ожидать, что исключение их из рассмотрения явится оправданным. Поэтому на втором этапе исследования ограничим рамками четырехчастотного приближения и будем искать решение уравнения (2) в виде

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [A_k(x) e^{i\omega_k \tau} + \text{к. с.}], \quad (9)$$

где

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad \omega_4 = \omega_1 + \omega_2, \quad A_k(x) = B_k(x) e^{iS_k(x)} \quad (10)$$

комплексные амплитуды.

После подстановки (9) в уравнение (2) получаем следующую систему укороченных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \delta_1 A_1 &= \alpha \omega_1 (A_2 A_3 + A_2^* A_4) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} + \delta_2 A_2 &= \alpha \omega_2 (A_1 A_3^* + A_1^* A_4) \\ \frac{\partial A_3}{\partial x} + \delta_3 A_3 &= \alpha \omega_3 A_1 A_2^* \\ \frac{\partial A_4}{\partial x} + \delta_4 A_4 &= \alpha \omega_4 A_1 A_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{где } \alpha = i \frac{\varepsilon}{2c_0^2}, \quad \delta_k = \frac{b\omega_k^2}{2\rho_0 c_0^3}.$$

Из системы (11) легко могут быть получены соотношения:

$$\frac{d|A_3|^2}{\omega_3} + \frac{d|A_4|^2}{\omega_4} = -\frac{d|A_1|^2}{\omega_1}, \quad (12)$$

$$\frac{d|A_3|^2}{\omega_3} - \frac{d|A_4|^2}{\omega_4} = \frac{d|A_2|^2}{\omega_2}.$$

Так как на входе в нелинейную среду  $A_3 = A_4 = 0$ , то на начальном участке взаимодействия  $d|A_3|^2 > 0$  и  $d|A_4|^2 > 0$ , что с учетом (12) дает  $\left| \frac{d|A_2|^2}{\omega_2} \right| < \left| \frac{d|A_1|^2}{\omega_1} \right|$ . При  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \gg 1$  получаем  $|dE_2| \ll |dE_1|$ , где  $dE_1$  и  $dE_2$  — приращения энергии волн  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. При этом  $dE_1 < 0$ . Это говорит о том, что на начальном участке взаимодействия генерация волн суммарной и разностной частот происходит в основном за счет энергии высокочастотной волны  $\omega_1$ , которая вследствие этого испытывает дополнительное затухание. Если кроме того  $E_1(0) \ll E_2(0)$ , то относительные изменения энергии волны  $\omega_2$  настолько невелики, что можно пренебречь изменением амплитуды волны  $\omega_2$  за счет взаимодействия. Используя решение Бесселя — Фубини для амплитуд собственных гармоник волны  $\omega_2$ , легко также оценить расстояния, на которых можно не считаться с потерями энергии волны  $\omega_2$

на генерацию собственных гармоник. Так, при  $x < \frac{x_{\text{разр}}}{2}$ , где  $x_{\text{разр}} = \frac{c_0^2}{\varepsilon |A_2(0)| \omega_2}$ , относительные изменения амплитуды первой гармоники за счет нелинейных искажений не превышают 0,03. Таким образом, если выполнены все перечисленные выше условия, а естественное затухание волны  $\omega_2$  на исследуемых расстояниях невелико (т. е.  $\delta_2 x \ll 1$ ), мы можем воспользоваться приближением заданного поля, считая  $A_2(x) = \text{const} = A_0$ . Переходя к действительным амплитудам и фазам  $A_k(x) = F_k(x) e^{iS_k(x)}$ , из системы (11) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \delta_1 B_1 &= \beta \omega_1 (B_3 \sin \gamma_1 + B_4 \sin \gamma_2) \\ \frac{\partial B_3}{\partial x} + \delta_3 B_3 &= -\beta \omega_3 B_1 \sin \gamma_1 \\ \frac{\partial B_4}{\partial x} + \delta_4 B_4 &= -\beta \omega_4 B_1 \sin \gamma_2 \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} &= \beta \left[ \left( \omega_1 \frac{B_3}{B_1} - \omega_3 \frac{B_1}{B_3} \right) \cos \gamma_1 + \omega_1 \frac{B_4}{B_1} \cos \gamma_2 \right] \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} &= \beta \left[ \left( \omega_1 \frac{B_4}{B_1} - \omega_4 \frac{B_1}{B_4} \right) \cos \gamma_2 + \omega_1 \frac{B_3}{B_1} \cos \gamma_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $\gamma_1 = S_1 - S_3$ ,  $\gamma_2 = S_1 - S_4$ ,  $\beta = \frac{\varepsilon A_0}{2c_0^2}$ .

Если  $B_3(0) = B_4(0) = 0$ , то совершенно аналогично тому, как это делается в [5] в случае трехчастотного приближения, можно получить  $\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ , что приводит к линейной системе трех уравнений для нахождения  $B_1$ ,  $B_3$  и  $B_4$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \delta_1 B_1 &= \beta \omega_1 (B_3 - B_4), \\ \frac{\partial B_3}{\partial x} + \delta_3 B_3 &= -\beta \omega_3 B_1, \\ \frac{\partial B_4}{\partial x} + \delta_4 B_4 &= \beta \omega_4 B_1, \end{aligned} \quad (14)$$

решение которой ищется в виде  $B_i(x) = c_i \exp\{gx\}$  и может быть выражено либо через тригонометрические, либо через гиперболические функции в зависимости от того, является ли  $g$  комплексной или действительной величиной.

Приведем здесь конкретный вид решения системы (14) для случая  $\varepsilon \text{Re}_2 \gg 1$ . Тогда  $g$  принимает одно действительное значение  $g_1 = -\rho_1$  и два комплексно сопряженных  $g_{2,3} = -\rho_2 \pm iq$ . При этом

$$B_i(x) = b_{i1} e^{-\rho_1 x} + b_{i2} e^{-\rho_2 x} \cos qx + b_{i3} e^{-\rho_2 x} \sin qx, \quad (i = 1, 3, 4) \quad (15)$$

где коэффициенты  $b_{ik}$  находятся путем подстановки найденного решения в систему (14) с учетом граничных условий

$$B_3(0) = B_4(0) = 0, \quad B_1(0) = B_0. \quad (16)$$

Наиболее просто выражения для  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $q$  и  $b_{ik}$  выглядят в случае  $\varepsilon \text{Re}_2 \gg 1$  и  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \gg 1$ . Отбрасывая величины порядка  $\left(\frac{1}{\varepsilon \text{Re}_2}\right)^3$ ,  $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3$ ,  $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon \text{Re}_2}$ ,  $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon \text{Re}_2}\right)^2$ , получаем

$$\begin{aligned} B_1(x) &= B_0 e^{-\rho x} \left[ \cos qx - \frac{2}{R^2} (1 - \cos qx) + \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{r}{R} \sin qx \right], \\ B_3(x) &= -B_0 e^{-\rho x} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - r) \left( 1 + \frac{1}{R^2} \right) \sin qx + \frac{1}{R} (1 - \cos qx) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$B_4(x) = B_0 e^{-px} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (1+r) \left( 1 + \frac{1}{R^2} \right) \sin qx - \frac{1}{R} (1 - \cos qx) \right],$$

где  $p = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_4}{3}$ ,  $r = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ,  $R = \varepsilon \text{Re}_2$ ,

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\varepsilon A_0 \omega_1}{c_0^2} \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right). \quad (18)$$

Характерно, что как в трехчастотном, так и четырехчастотном приближении зависимость  $B_1$ ,  $B_3$  и  $B_4$  от начального сдвига фаз появляется только при условии  $\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_1 = \omega_1 - \omega_2$  (мы считаем  $\omega_1 > \omega_2$ ).

Принятая нами модель взаимодействия, описывающая процесс генерации спектральных компонентов  $\omega_1 - \omega_2$  и  $\omega_1 + \omega_2$ , совершенно исключает из рассмотрения волны других комбинационных частот. Однако по мере нарастания амплитуд волн суммарной и разностной частот начинается их эффективное взаимодействие с мощной волной  $\omega_2$ , приводящее, в частности, к возникновению частотных компонентов  $\omega_1 - 2\omega_2$  и  $\omega_1 + 2\omega_2$ . Определенный вклад в этот процесс вносит и взаимодействие волн  $\omega_1$  со второй гармоникой волны  $\omega_2$ , возникающей в среде. Взаимное влияние многочисленных волн комбинационных тонов внесет определенные коррективы и в полученные выше выражения для амплитуд  $B_i(x)$ . К сожалению, достаточно наглядные аналитические результаты, учитывающие перекрестные взаимодействия между волнами всех комбинационных частот, получить не удастся. Вместе с тем можно провести численные расчеты с учетом всех таких взаимодействий, оказывающих заметное влияние на результирующий сигнал. Для этого посредством замены

$$U = \frac{b}{\varepsilon \rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\ln V) \quad (19)$$

от уравнения (2) перейдем к уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha_0 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}, \quad (20)$$

где  $\alpha_0 = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$ , решение которого при наличии граничных условий (1) может быть записано следующим образом:

$$V(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-K(x, \tau, \eta)} d\eta, \quad (21)$$

где

$$K(x, \tau, \eta) = \varepsilon \text{Re}_1 \cos \omega_1 \eta + \varepsilon \text{Re}_2 \cos (\omega_2 \eta + \varphi) + \frac{(\eta - \tau)^2}{4\alpha_0 x},$$

$$\text{Re}_i = \frac{\rho_0 c_0 A_i}{b \omega_i} \quad (\varphi - \text{начальный сдвиг фаз}).$$

Можно показать, что подынтегральная функция при  $\sigma_1 x + \sigma_2 x < 1$ , где  $\sigma_i = \frac{\varepsilon}{c_0^2} A_i \omega_i$ , имеет один максимум в точке  $\eta_0$ , которая находится

из условия  $\frac{\partial}{\partial \eta} K(x, \tau, \eta) = 0$ , приводящего к следующей функциональной зависимости:

$$A_1 \sin \omega_1 \eta_0 + A_2 \sin (\omega_2 \eta_0 + \varphi) = \frac{\eta_0 - \tau}{\frac{\varepsilon}{c_0^2} x} \quad (22)$$

В этом случае основной вклад в значение интеграла (21) вносит окрестность экстремальной точки  $\eta_0$ . Применяя метод Лапласа, мы можем аппроксимировать функцию  $V(x, \tau)$  при  $x < \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2}$  с любой наперед заданной точностью. Для нас она определяется желаемой точностью построения соответствующего приближения для  $U(x, \tau)$  с учетом функциональной зависимости (19). При этом в любом приближении как в выражение  $\tilde{V}(x, \tau)$ , аппроксимирующее функцию  $V(x, \tau)$ , так и в получаемое из него по формуле (19) выражение  $\tilde{U}(x, \tau)$  войдет неявная функция  $\eta_0(x, \tau)$ . От неявной функциональной зависимости можно избавиться, заметив, что при  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{l} \tilde{U}(x, \tau)$  — функция периодическая по  $\tau$  с периодом  $T = k \frac{2\pi}{\omega_1} = l \frac{2\pi}{\omega_2}$ . Раскладывая  $U(x, \tau)$  в ряд Фурье и совершая замену переменных

$$\zeta = \frac{\omega_1}{k} \eta_0 = \frac{\omega_2}{l} \eta_0,$$

$$\tau = \frac{k}{\omega_1} \zeta - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x [A_1 \sin k\zeta + A_2 \sin (l\zeta + \varphi)],$$

что соответствует условию (22), получаем для коэффициентов Фурье следующие выражения:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{U}(x, \eta_0) \sin n \frac{2\pi}{T} \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{U}[x, \eta_0(\zeta)] L(\zeta) \sin n [\zeta - A(\zeta)] d\zeta, \quad (23)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{U}(x, \eta_0) \cos n \frac{2\pi}{T} \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{U}[x, \eta_0(\zeta)] L(\zeta) \cos n [\zeta - A(\zeta)] d\zeta,$$

где  $L(\zeta) = 1 - \sigma_1 x \cos k\zeta - \sigma_2 x \cos (l\zeta + \varphi)$ ,

$$A(\zeta) = \frac{\sigma_1 x}{k} \sin k\zeta + \frac{\sigma_2 x}{l} \sin (l\zeta + \varphi).$$

Амплитуды волн комбинационных частот вычисляются при этом по формуле  $B_n(x) = \sqrt{[a_n(x)]^2 + [b_n(x)]^2}$ , причем основным частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствуют значения  $n=k$  и  $n=l$ , разностной и суммарной частотам —  $n=k-l$  и  $n=k+l$  и т. д.

В проведенных нами численных расчетах были использованы первые два члена ряда, представляющего собой асимптотическое разложение функции  $V(x, \tau)$ , что привело к довольно сложному выражению для  $\tilde{U}(x, \eta_0)$ , которое мы не приводим вследствие громоздкости. Это обеспечило точность расчета амплитуд  $B_i(x)$  комбинационных тонов

$\omega_1 \pm \omega_2$  и  $\omega_1 \pm 2\omega_2$  для  $x < \frac{1}{2(\sigma_1 + \sigma_2)}$  не ниже 10%. Для малых значений  $x$  эта точность была существенно превышена (так, при  $x < \frac{1}{8(\sigma_1 + \sigma_2)}$  она составила величину меньшую, чем 1%).

Результаты некоторых проведенных расчетов для воды представлены на рис. 1—3. На рис. 1 изображены графики изменения с расстоянием амплитуды слабой высокочастотной волны ( $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 12$  МГц,  $B_0 = 6 \cdot 10^{-2}$  см/с) в случае ее взаимодействия с мощной низкочастотной волной ( $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 1$  МГц,  $A_0 = 8$  см/с). Кривая 1 соответствует 3-частотному, кривая 2 — 4-частотному приближению, кривая 3 — результату численного решения уравнения (2) при наличии граничных условий (1). Кривая 4 соответствует затуханию волны  $\omega_1$  в отсутствие взаимодействия.

На рис. 2, а представлены графики изменения с расстоянием амплитуды волны разностной частоты ( $f_1 - f_2 = 11$  МГц) для того же случая взаимодействия. Здесь прямая 1 — решение Римана во втором приближении, дающее рост амплитуд волн разностной и суммарной частот с расстоянием [6]:

$$B(x) = \frac{\varepsilon}{2\sigma_0^2} (\omega_1 \pm \omega_2) A_0 B_0 x. \quad (24)$$

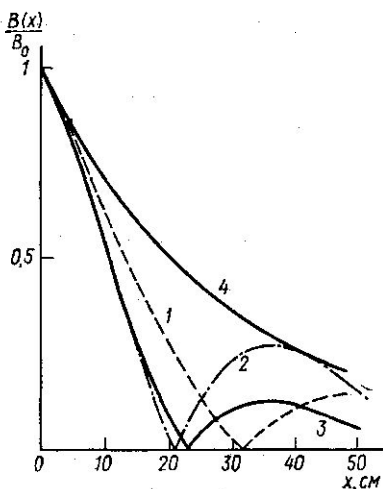


Рис. 1

Кривая 2 соответствует 3-частотному, кривая 3 — 4-частотному приближению, кривая 4 — результат численного решения. На рис. 2, б представлены графики изменения с расстоянием амплитуды волны суммарной частоты 13 МГц для тех же соотношений амплитуд взаимодействующих волн, что и на рис. 2, а. Нумерация кривых аналогична нумерации их на рис. 2, а. Уделяя главное внимание результатам взаимодействия волн, мы не приводим здесь зависимостей от расстояния амплитуд собственных гармоник мощного низкочастотного сигнала 1 МГц, которые возникают на достаточно больших расстояниях от начала участка взаимодействия и вносят определяющий вклад в энергию соответствующих частотных компонентов в конце этого участка.

На рис. 1 видно, что волна  $\omega_1$  в результате взаимодействия должна испытывать сильное дополнительное затухание. Вместе с тем теоретические расчеты предсказывают характерные осцилляции амплитуд волн основной и комбинационных частот с расстоянием, что является результатом интенсивного обмена энергией между всеми частотными компонентами. Период этих пространственных осцилляций  $L$  или, точнее говоря, расстояние между двумя последовательными минимумами, достигаемыми амплитудами соответствующих частотных компонентов, может быть оценен с помощью аналитических результатов, получен-



ных в 4-частотном приближении. Наиболее просто выражение для  $L$  выглядит при  $\epsilon \text{Re}_2 \gg 1$ . В этом случае из (15) и (18) легко получить

$$L = \frac{\pi}{q} = \frac{\sqrt{2} \pi c_0^2}{\epsilon \omega_1 A_0}, \quad (25)$$

что достаточно хорошо согласуется с результатами численного решения уравнения (2).

Анализ полученных результатов показывает, что в случае  $\epsilon \text{Re}_2 \gg 1$  и  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \gg 1$  амплитуды волн комбинационных тонов, возникающих в

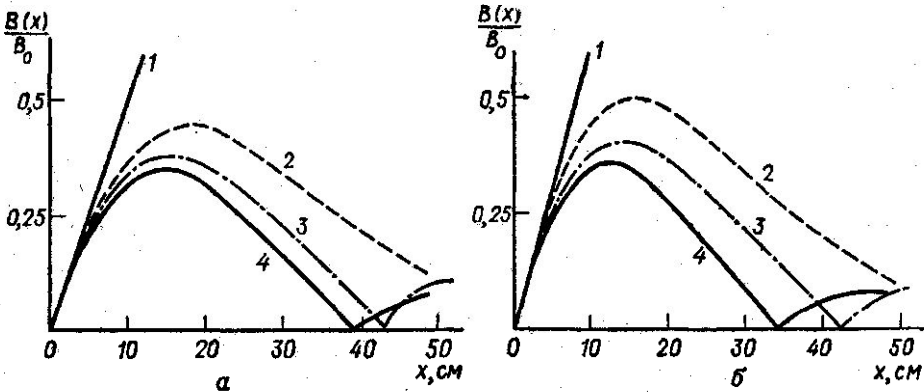


Рис. 2

результате взаимодействия, прямо пропорциональны амплитуде слабой волны; амплитуда мощной низкочастотной волны определяет дополнительное затухание высокочастотной волны, быстроту нарастания амплитуд комбинационных тонов и период их пространственных осцилляций. Из формулы (25), кроме того, следует, что период пространственных осцилляций обратно пропорционален частоте  $\omega_1$ . При этом в пределах 3-частотного и 4-частотного приближений, а также при использованной точности численных расчетов зависимость от начального сдвига фаз волн  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отсутствует.

Возникает также вопрос: какое количество минимумов для амплитуд волн основной и комбинационных частот предсказывает теория в каждом конкретном случае. Из выражения (25) видно, что  $\frac{x_{\text{разр}}}{L} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\omega_1}{\omega_2}$ . Отсюда следует, что при неболь-

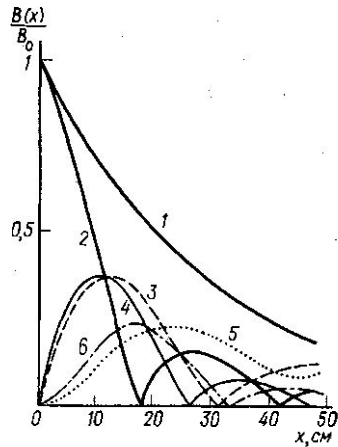


Рис. 3

шой величине отношения  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  разрыв в мощной низкочастотной волне наступит раньше, чем амплитуды волн комбинационных частот

достигнут первого минимума. Для взятого в предыдущих расчетах соотношения  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 12$  получаем  $\frac{x_{\text{разр}}}{L} \approx 2,7$ .

Таким образом, в соответствии с развитой выше теорией, справедливой при  $x < x_{\text{разр}}$ , в этом случае можно ожидать появления не более двух упомянутых выше минимумов. При этом осцилляции при заданном соотношении частот тем более ярко выражены, чем меньше естественное затухание высокочастотной волны на расстоянии до  $x_{\text{разр}}$ . Поскольку величина  $x_{\text{разр}}$  обратно пропорциональна  $\omega_2$ , а затухание высокочастотной волны пропорционально  $\omega_1^2$ , осцилляции будут ярче выражены при меньших абсолютных значениях частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (при больших, однако, значениях  $Re_2$  для тех же  $x$ ).

Все эти выводы могут быть достаточно хорошо проиллюстрированы кривыми зависимости от расстояния амплитуд волн основной и комбинационных частот для различных соотношений начальных амплитуд и частот взаимодействующих волн. Графики на рис. 3, представляющие собой результаты численных расчетов, соответствуют следующим частотам и начальным значениям амплитуд взаимодействующих волн:  $B_0 = 6 \cdot 10^{-2}$  см/с,  $f_1 = 12$  МГц,  $A_0 = 10$  см/с,  $f_2 = 1$  МГц.

Кривая 1 (рис. 3) соответствует затуханию волны  $\omega_1$  в отсутствие мощной волны  $\omega_2$ , кривая 2 — при ее наличии; кривые 3 и 4 дают зависимость от расстояния амплитуд волн разностной и суммарной частот, кривые 5 и 6 дают изменение с расстоянием амплитуд волн комбинационных частот  $\omega_1 - 2\omega_2$  и  $\omega_1 + 2\omega_2$  соответственно. Все численные расчеты проведены на машине БЭСМ-6.

В заключение авторы выражают благодарность И. Д. Антонову за помощь при проведении численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Чиркин А. С. ЖЭТФ, 67, 5, 1903—1911.
2. Красильников В. А.; Руденко О. В., Чиркин А. С. «Акустический журнал», 1975, 21, 124—126.
3. Павлов В. И. «Акустический журнал», 1976, 22, 580—585.
4. Наугольных К. А., Рыбак С. А. «Акустический журнал», 1976, 22, 5, 735—741.
5. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975.
6. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., 1966.

МГУ. Кафедра акустики