УДК 532.517.45

А. М. Обухов

СТРУКТУРА И ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В теории нелинейных процессов в непрерывных средах за последние десятилетия накопился огромный фактический материал, что стимулировало развитие обобщающих исследований, способствующих синтезу различных подходов в решении конкретных задач и созданию некоторой общей физической основы для моделирования (в широком смысле слова) сложных нелинейных систем. Очень существенный вклад в создание таких обобщающих теорий в применении к волновым процессам был сделан в трудах Р. В. Хохлова и его школы [1, 2].

В настоящей статье обсуждаются некоторые понятия, связанные с выделением классов квадратично-нелинейных систем, представляющих интерес для физических приложений и возникающих, в частности, при надлежащей аппроксимации уравнений гидродинамики [1].

Для достаточно широкого класса «практически интересных» нелинейных систем указываются методы анализа и синтеза, которые могут быть полезны при их моделировании с помощью некоторых «стандартных блоков», физические реализации которых хорошо известны.

Инвариантное описание квадратично-нелинейных систем. Мы будем исходить из некоторой аппроксимации уравнений движения реальной нелинейной системы, в которой состояние $x=(x^1, ..., x^n)$ является вектором некоторого n-мерного фазового пространства R^n, а уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} x^j x^k, \tag{1}$$

для сокращения записи мы пользуемся тензорными обозначениями, по одноименным индексам производится суммирование.

При изучении процессов в непрерывных средах, описываемых уравнениями в частных производных, система (1) может быть получена путем аппроксимации фундаментальных уравнений задачи по методу Галеркина. В применении к уравнениям гидродинамики несжимаемой жидкости, описывающим движение среды в некотором ограниченном объеме, такая аппроксимация требует определенного запаса «опорных» соленоидальных полей, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям, по которым разлагается поле скоростей. Примеры таких аппроксимаций можно найти в монографии [3], а также статье автора [4].

[1] Напомним, что рассмотрение уравнений движения в квадратично-нелинейном приближении отвечает учету трехмодовых взаимодействий.

С фазовым пространством R^n естественно связать общую группу аффинных преобразований, отвечающих преобразованию системы координат. Две системы S и S', реализуемые в R^n, являются эквивалентными, если отвечающие им динамические тензоры Γ и Γ' аффинно эквивалентны, т. е. уравнения движения переходят друг в друга при некотором невыраженном линейном преобразовании $x'=Tx$. Точное моделирование заключается в замене данной системы некоторой другой, но ей эквивалентной. Свойство системы называется структурным, если оно является общим для всего класса эквивалентных систем.

При $n=2$ возможно дать полную аффинную классификацию квадратично-нелинейных систем. Соответствующие алгебраические инварианты приведены в монографии [5], где имеется также соответствующая библиография.

При $n>2$ общий «запас» квадратично-нелинейных систем является настолько обширным, что полная классификация оказывается делом совершенно нереальным. Вместе с тем для приложений, по-видимому, интересны лишь некоторые более узкие классы нелинейных систем, обладающие определенными структурными свойствами.

Для многих приложений оказывается существенным выделение класса систем, обладающих положительно-определенным интегралом движения и сохраняющих при движении фазовый объем. Для таких систем, названных автором [6] системами гидродинамического типа (СГТ), динамический тензор удовлетворяет дополнительным условиям

$$\Gamma_{i,jk}+\Gamma_{j,ki}+\Gamma_{k,ij}=0, \qquad (2)$$

где $\Gamma_{i,jk}=g_{i\lambda}\Gamma^{\lambda}_{jk}$, g_{ik} — ядро инвариантной квадратичной формы и

$$\gamma_j=\Gamma^{\lambda}_{j\lambda}=0. \qquad (3)$$

Последнее свойство, отвечающее сохранению фазового объема, будем называть регулярностью.

Классическим примером такой системы является гироскоп, уравнения движения которого можно записать, взяв за «координаты» проекции момента на главные оси в следующей форме:

$$\dot{x}=pyz,\ \dot{y}=qzx,\ \dot{z}=rxy, \qquad (4)$$

причем $p+q+r=0$. За главный интеграл естественно принять сумму квадратов моментов[2].

Очень важным обстоятельством в общей теории квадратично-нелинейных систем является обратное утверждение — простейшая нетривиальная СГТ может быть реализована при $n=3$, и она эквивалентна классическому гироскопу. Такую систему естественно назвать триплетом. Легко показать, что при $n=2$ невозможно удовлетворить одновременно закону сохранения энергии и требованию регулярности. Рассмотрим триплет в декартовой системе координат, в которой $2E=x^2+y^2+z^2$. В декартовой системе различие между верхними и нижними индексами пропадает. Из «циклического соотношения» (2) следует, что коэффициенты взаимодействия с тремя одинаковыми индексами обращаются в нуль. Имеются три коэффициента, для которых все индексы различны:

---

[2] Если гироскопы разноосные, то $pqr\neq0$. Следует отметить, что все разноосные гироскопы аффинно эквивалентны между собой, так как выбирая соответствующие масштабы для разных осей, можно добиться того, чтобы $p=r=1$, $q=-2$.

$$\begin{aligned} p &= \Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32}, \\ q &= \Gamma_{2,31} = \Gamma_{2,13}, \\ r &= \Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21}, \end{aligned} \tag{5}$$

причем $p+q+r=0$.

Остаются еще коэффициенты с двумя различными индексами (всего двенадцать):

$$\Gamma_{1,22},\ \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21};\quad \Gamma_{1,33},\ \Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31},$$

$$\Gamma_{2,11},\ \Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21};\quad \Gamma_{2,33},\ \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32}.$$

Из условия (1) вытекает $\Gamma_{1,22} = -2\Gamma_{2,12}$ и другие аналогичные соотношения. Отсюда следует, что уравнения движения триплета, удовлетворяющие закону сохранения энергии, содержат всего 8 независимых коэффициентов (9 коэффициентов, связанных одним соотношением):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= pyz + my^2 + m'z^2 - n'xy - lxz, \\ \frac{dy}{dt} &= qxz + nz^2 + n'x^2 - mxy - l'yz, \\ \frac{dz}{dt} &= rxy + lx^2 + l'y^2 - m'xz - nyz. \end{aligned} \tag{6}$$

Выпишем теперь дивергенцию фазового потока и воспользуемся условием регулярности

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}\right) = (m+m')x + (n+n')y + (l+l')z, \tag{7}$$

$\sigma = 0$ при $m' = -m$, $n' = -n$, $l' = -l$. Соответствующие уравнения регулярного триплета принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= pyz + m(y^2 - z^2) + nxy - lxz, \\ \frac{dy}{dt} &= qzx - mxy + n(z^2 - x^2) + lyz, \\ \frac{dz}{dt} &= rxy + mxz - nyz + l(x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{8}$$

В целях дальнейшего упрощения уравнений следует воспользоваться возможностью «вращения» системы координат в фазовом пространстве, при котором выражение «энергии» не меняется. Преобразование вращения зависит от трех параметров, благодаря чему можно избавиться от коэффициентов m, n, l, обратив их в нуль.

При исследовании квадратично-нелинейных систем, допускающих квадратичный интеграл, существенное значение имеет возможность выбора некоторой «естественной» системы координат, введенной в работе [3]. Прежде всего напомним, что с любой квадратично-нелинейной системой можно связать инвариантным способом некоторую квадратичную форму. Вычислим матрицу устойчивости системы

$$A(x) = \left\| \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x_j} \right\| = \| \Gamma^i_{jk} x^k \|, \tag{9}$$

которая является линейной функцией вектора состояния x. Для регулярных систем линейная форма $\sigma = -SpA$ тождественно обращается в нуль. След от квадрата матрицы устойчивости является, очевидно, квадратичной формой. В связи с этим мы определим характеристическую форму системы следующим образом:

$$B(x) = \frac{1}{2} SpA^2. \tag{10}$$

Эта форма всегда имеет размерность квадрата частоты. Симметричный тензор B_{ik}, отвечающий этой форме, выражается квадратично через коэффициенты взаимодействия

$$B_{ik} = \frac{1}{2} \Gamma^{\lambda}_{i\mu} \Gamma^{\mu}_{k\lambda}. \tag{11}$$

Две квадратичные формы $g(x)$ и $B(x)$, из которых первая положительно-определенная, всегда можно привести к диагональному виду (сумме квадратов); соответствующую систему координат мы будем называть «естественным представлением» динамической системы. При отсутствии кратных корней у матрицы $g^{-1}B$ соответствующие главные оси, отвечающие некоторым «главным модам», определяются однозначно. Вычислим, например, форму B для регулярного триплета, уравнения движения которого в произвольном «декартовом» базисе были получены выше (4)

$$A = \left\| \begin{matrix} ny - lz & pz + 2my + nx & py - 2mz - lx \\ qz - 2nx - my & lz - mx & qx + 2nz + ly \\ ry + 2lx + mz & rx - 2ly - nz & mx - ny \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} B = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A^2 = [m^2 - 2(n^2 + l^2) + qr] x^2 + [n^2 - 2(l^2 + m^2) + rp] y^2 + \\ + [l^2 - 2(m^2 + n^2) + pq] z^2 + [-6nl + 2m(q - r)] yz + \\ + [-6ml + 2n(r - p)] zx + [-6mn + 2l(p - q)] xy. \end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда следует, что в естественном представлении

$$\begin{aligned} m(q - r) &= 3nl, \\ n(r - p) &= 3lm, \\ l(p - q) &= 3mn. \end{aligned} \tag{14}$$

Умножая первое уравнение на nl, второе на lm и третье на mn и складывая, получаем

$$(nl)^2 + (lm)^2 + (mn)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что не менее двух коэффициентов должны обращаться в нуль. Пусть это будут $m = l = 0$, тогда из второго уравнения следует, что

$$n(r - p) = 0.$$

При $r \neq p$ $n = 0$. Случай $r = p$ отвечает кратным коэффициентам матрицы $g^{-1}B$ и требует дополнительного рассмотрения. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = pyz + nxy,$$
$$\dot{y} = -2pzx + n(z^2 - x^2), \tag{15}$$
$$\dot{z} = pxy - nyz$$

и, естественно,

$$B(x) = -(p^2 + n^2)(x^2 + z^2 - 2y^2). \tag{16}$$

Выполним вращение в плоскости (x, z), полагая

$$x' = x \cos \varphi + z \sin \varphi,$$
$$z' = -x \sin \varphi + z \cos \varphi,$$
$$y' = y.$$

При

$$\sin 2\varphi = \frac{n}{\sqrt{n^2 + p^2}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{p}{\sqrt{n^2 + p^2}}$$

система приводится к канонической форме (штрих у координат опускается)

$$\dot{x} = p'yz, \quad \dot{y} = -2p'zx, \quad \dot{z} = pxy, \tag{17}$$

где $p' = \sqrt{p^2 + n^2}$.

Напомним, что гироскоп всегда имеет два независимых квадратичных интеграла — квадрат момента и энергию.

В каноническом представлении триплета характеристическая форма и *все* квадратичные интегралы описываются диагональными матрицами. Среди квадратичных интегралов всегда имеется главный интеграл, по отношению к которому система особенно симметрична, — матрица $g^{-1}B$ имеет кратный корень и $p=r$. Физический смысл этих интегралов в случае гироскопа зависит от геометрии тензора моментов инерции. Если моменты инерции образуют гармонический ряд, то главным интегралом является квадрат моментов. Если момент инерции образует арифметическую прогрессию, то главным интегралом является энергия. В случае геометрической прогрессии главным интегралом является комбинация

$$g(x) = \frac{1}{2}(M^2 + 2I_2E), \tag{18}$$

где I_2 — момент инерции, отвечающий средней (неустойчивой) оси.

Таким образом, мы доказали, что простейшая система гидродинамического типа является триплетом, имеет два независимых квадратичных интеграла движения и эквивалентна классическому гироскопу. Рассмотрение пары квадратичных форм — характеристической формы $B(x)$ и фундаментальной формы $g(x)$ — позволяет построить естественную систему координат, которой целесообразно пользоваться при сравнении различных систем и выяснении вопроса об их эквивалентности, а также для формального определения понятия «главных мод» динамической системы в общем случае. Любая сложная система может быть представлена в виде «суперпозиции» простейших подсистем, эквивалентных триплету.

Симметризуемость и гамильтоновы системы. Для изучения сложных квадратично-нелинейных систем (при $n>3$), допускающих квадратичный интеграл, целесообразно еще более сузить класс рассматриваемых систем, вводя понятие симметризуемости, что было сделано в работе [7].

Система, заданная в R^n

$$\dot{x}^i = f^i(x), \tag{19}$$

называется симметризуемой, если существует «симметризатор» — невырожденная билинейная форма $S(\xi, \eta) = S^{\lambda\mu}\xi_\lambda\eta_\mu$, определенная в сопряженном пространстве $\overline{R}^n$ (пространство линейных форм), такая, что

$$\xi_\lambda \dot{x}^\lambda \equiv \xi_\lambda S^{\lambda\mu} \nabla_\mu F, \tag{20}$$

где F — «динамическая функция» системы, определяющая ее уравнение движения.

Если матрица S — косая, то мы приходим к гамильтоновым системам — уравнения движения в надлежащем базисе записываются в форме Гамильтона, причем F совпадает с гамильтонианом системы. Такие системы мы будем называть H-системами, число измерений в этом случае должно быть обязательно четным.

Далее мы рассмотрим другой важный случай, когда $S(\xi, \eta)$ является симметричной формой и выражается через соответствующую квадратичную форму $\theta(\xi) = S(\xi, \xi)$. Такие системы мы будем называть θ-системами и пользоваться символом θ вместо S. Понятие θ-систем полезно тем, что оно применимо к системам любого порядка.

Матрицу $M = S^{-1}$ можно рассматривать как некоторое ядро билинейной формы в R^n. Для квадратично-нелинейных систем F является кубической формой. Условие симметризуемости легко сформулировать в терминах матрицы устойчивости. Система является симметризуемой, если существует постоянная матрица M с $\operatorname{Det} M \neq 0$, такая, что матрица MA симметрична. Если при этом $M^* = M$, то рассматриваемая система является θ-системой, причем

$$\theta = M^{-1}.$$

Легко видеть, что понятие симметризуемости является структурным, так как его формулировка аффинно инвариантна.

Покажем, что триплет является θ-системой. Соответствующие выкладки удобно вести в каноническом представлении:

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 0 & pz & py \\ qz & 0 & qx \\ ry & rx & 0 \end{Vmatrix}, \tag{21}$$

$$MA = \begin{Vmatrix} M_{12}qz + M_{13}ry, & M_{11}pz + M_{13}rx, & M_{11}py + M_{12}qx \\ M_{22}qz + M_{23}ry, & M_{21}pz + M_{23}rx, & M_{21}py + M_{22}qx \\ M_{32}qz + M_{33}ry, & M_{31}pz + M_{33}rx, & M_{31}py + M_{32}qx \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Из условия симметрии матрицы MA для любого состояния для невырожденного случая, когда $pqr \neq 0$, вытекает

$$M_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k,$$

$$M_{11}p = M_{22}q,$$

$$M_{11}p = M_{23}r,$$

$$M_{22}q = M_{33}r.$$

Решение получается с точностью до произвольного множителя:

$$M_{11}=Kqr,\ M_{22}=Krp,\quad M_{33}=Kpq. \tag{23}$$

Таким образом, триплет является θ-системой, при этом оказывается, что

$$M(x)=KB(x), \tag{24}$$

т. е. в качестве симметризатора может быть взята матрица, обратная матрице B_{ik}. Такие системы, у которых B-форма порождает симметризатор, естественно называть B-системами. В [7] было показано, что любая регулярная, невырожденная квадратично-нелинейная B-система при $n=3$ совпадает с триплетом, при этом

$$F=Cxyz. \tag{25}$$

Условие симметризуемости для $n>4$ оказывается весьма жестким. Уже при $n=4$ условие симметрии тензора MA сводится к 24 уравнениям (тождественное равенство шести линейных форм относительно 4 переменных) для 16 или 10 элементов матрицы M_{ik} (меньшая цифра относится к θ-системе). Вместе с тем именно это свойство выделяет класс систем, интересный для физических приложений.

Легко показать [7], что для симметризуемых квадратично-нелинейных систем всегда

$$F=\frac{1}{3}\frac{dM}{dt}, \tag{26}$$

где полная производная вычисляется на основе уравнений движения системы.

Структура θ-системы, допускающей квадратичный интеграл. Будем рассматривать θ-системы, допускающие квадратичный интеграл $g(x)$ в базисе, в котором M и g приводятся к диагональному виду. Можно показать, что существует система отсчета, в которой три квадратичных формы B, g и M одновременно приводятся к канонической форме.

Таким образом, канонический базис отвечает некоторому естественному представлению системы. Аффинор $\theta g=M^{-1}g$ выражается диагональной матрицей $[\lambda_i]$. Динамическая функция F распадается на сумму членов вида

$$F_{(\alpha)}=c_\alpha\frac{x_i^2}{2}x_k \quad \text{и} \quad F_{(\beta)}=c'_\beta x_ix_jx_k, \tag{27}$$

где $\{\alpha\}$ — совокупность допустимых парных взаимодействий, для которых

$$2\lambda_i+\lambda_k=0, \tag{28}$$

$\{\beta\}$ — совокупность тройных взаимодействий, возможных при

$$\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k=0. \tag{29}$$

Коэффициенты c_α и c'_β описывают интенсивность таких взаимодействий.

Условия (28) и (29) отвечают известным «резонансным условиям», и их смысл становится более ясным при переходе к комплексным системам, описывающим нелинейные взаимодействия колебаний.

Комплексным расширением некоторой квадратичной нелинейной системы называется система, в которой вектор x заменяется на комплексный вектор z, причем в правой части берутся комплексно-сопряженные значения — $\bar{z}_i$. Комплексное расширение θ-системы соответствует некоторой вещественной системе в фазовом пространстве $2n$-измерений, при этом оказывается, что система допускает также и гамильтоново представление, причем гамильтониан $H = \operatorname{Im} F(\bar{z})$, и в системе появляется кубический интеграл движения [3].

Некоторые выводы и приложения. Результаты, изложенные выше, хорошо известны каждому физику, занимающемуся изучением трехмодовых взаимодействий в любой конкретной задаче.

Цель статьи — показать, какими общими свойствами обладают квадратично-нелинейные системы, встречающиеся на практике, а также наметить алгоритм изучения структуры систем, заданных уравнениями движения в произвольном базисе.

Заметим, что в задачах гидродинамики несжимаемой жидкости изучение трехмодовых взаимодействий началось совсем недавно и позволило выяснить природу неустойчивости при движении жидкости внутри полостей эллиптического сечения [8, 9], построить «вихревой генератор» на параметрическом принципе [10] и открывает определенную перспективу в понимании такого сложного явления, как турбулентность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. ВИНИТИ, 1964.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1976.
3. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., 1974.
4. Обухов А. М. «Изв. вузов. Радиофизика», 1976, 19, 864—871.
5. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. «Штиинца», 1976.
6. Обухов А. М. ДАН СССР, 1969, 184, 309—312.
7. Обухов А. М. ДАН СССР, 1977, 233, 35—38.
8. Гледзер Е. Б., Новиков Ю. В., Обухов А. М., Чусов М. А. «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1974, 10, 115—118.
9. Гледзер Е. Б., Обухов А. М., Пономарев В. М. «Механика жидкости и газов», 1977, № 1, 15—23.
10. Горшков Н. Ф., Обухов А. М. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1976, 17, № 5, 580—584.

Институт физики атмосферы
АН СССР