УДК 534.222.2

В. Э. Гусев
О. В. Руденко

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Акустические течения возникают в жидкостях и газах из-за поглощения акустической волны, передающей среде свой импульс [1]. Это явление используется на практике для фиксации мелких частиц и манипулирования ими [2], для перемешивания агрессивных жидкостей или жидкостей в труднодоступных полостях (например в биологических тканях), формирования конвективных линз, а также во многих технологических процессах [3].

Акустические потоки описываются уравнениями движения несжимаемой жидкости в неоднородном силовом поле, определяемом конфигурацией звукового пучка, динамикой и механизмом диссипации волны [1]. В настоящее время хорошо изучены одномерные течения в трубе, как стационарные (эккартовские), так и нестационарные [1]. Характерное время установления таких течений пропорционально отношению $r_0^2\,\rho_0/\eta$ квадрата радиуса трубы r_0^2 к величине кинематической вязкости η/ρ_0. Если в известных решениях перейти к пределу $r_0\to\infty$ или $\eta\to 0$, время установления и скорость течения будут неограниченно расти. Это означает, что необходимо отказаться от упрощений и решать нелинейную и неодномерную задачу.

В некоторых, весьма специальных случаях стационарное нелинейное течение описывается модификацией решения Ландау о затопленной струе. Попытки анализа нестационарной задачи, предпринятые в работах [4, 5], привели к ряду качественных оценок; полная картина явления осталась невыясненной даже в общих чертах.

В настоящей работе дано точное аналитическое решение, описывающее развитие нелинейного аксиально-симметричного течения в звуковом поле.

Пусть в точке $x=0$ цилиндрической системы координат расположен круглый преобразователь — источник акустической волны. Если волна поглощается слабо на расстояниях порядка радиуса излучателя r_1 (т. е. $\alpha r_1 \ll 1$, где α — коэффициент затухания волны), уравнения для акустических течений можно свести к виду

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_r\frac{\partial U_x}{\partial r} + U_x\frac{\partial U_x}{\partial x} = F(r, x) + \frac{\eta}{\rho_0}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_x}{\partial r}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) = 0. \qquad (2)$$

Задачу требуется решить с нулевыми начальными условиями $U_x(t=0, x, r)=U_r(t=0, x, r)=0$. Нужно потребовать также ограниченности функций U_x и U_r при $r=0$ и обращения их в ноль при $r\to\infty$.

Система (1), (2) аналогична уравнениям пограничного слоя, особенно в их приложении к теории струй. Однако здесь постановка задачи иная, что связано с наличием «вынуждающей силы» $F(x, r)$ в уравнении (1).

Положим $F = A(\alpha x)\exp(-r^2/r_1^2)$, что соответствует гауссовскому распределению поля на излучателе. Считаем жидкость невязкой; это не приводит к неограниченному росту скорости течения и времени его установления, так как учет нелинейных членов в (1) устраняет эти особенности.

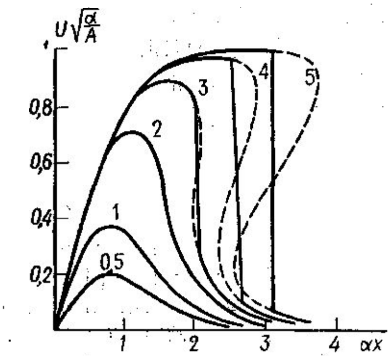

Рис. 1

Как нетрудно убедиться, для принятого вида $F(x, r)$ система (1), (2) при $\eta \to 0$ имеет точное решение

$$U_x = U(x, t)\, e^{-\frac{r^2}{r_1^2}};$$

$$U_r = -\frac{r_1^2}{2r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{r_1^2}}\right)\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}, \tag{3}$$

где $U(x, t)$ является решением квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = A(\alpha x); \quad U(x = 0, t) = U(x, t = 0) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) удается проанализировать. Для удобства выберем $A(\alpha x)$ в виде

$$A(\alpha x) = A\,\mathrm{sh}\,\alpha x\,\mathrm{ch}^{-3}\,\alpha x. \tag{5}$$

Выражение (5) хорошо моделирует реальное изменение внешней силы F вдоль оси пучка. Решение задачи (4), (5) имеет вид

$$\alpha t\sqrt{U^2 - U_\infty^2(x) + \frac{A}{\alpha}} = \ln\frac{\sqrt{U^2 - U_\infty^2(x) + \frac{A}{\alpha}}\,\mathrm{sh}\,\alpha x + U\,\mathrm{ch}\,\alpha x}{\sqrt{U_\infty^2(x) - U^2}}. \tag{6}$$

Здесь $U_\infty(x) = \sqrt{\frac{A}{\alpha}}\,\mathrm{th}\,\alpha x$ — стационарное решение (формирующееся при $t \to \infty$). Ниже используем $\sqrt{\alpha A}\,t \to t$, $\sqrt{\alpha/A}\,U \to U$.

Процесс установления $U(x, t)$, описываемый решением (6), изображен на рис. 1 для моментов времени $t = 0{,}5$; 1; 2; 3; 4; 5. Нетрудно видеть, что при $t \simeq 2{,}5$ профиль скорости течения становится разрывным. Поскольку имеет место полная математическая аналогия между уравнением (4) и уравнением простых волн в нелинейной акустике [1], фронт на рис. 1 построен в соответствии с правилом «равенства площадей». Строго говоря, вблизи разрыва течение уже не описывается уравнениями (1), (2); здесь возникает кольцевой вихрь, структуру которого следует описывать более сложными уравнениями.

Линии тока для гладкого ($t = 1$) и разрывного ($t = 4$) течения изображены на рис. 2. Функции $r(x, t)$ построены по формуле

$$\frac{r^2}{r_1^2} = -\ln\left[1 - \frac{c}{U(x,t)}\right], \tag{7}$$

следующей из решения (3). Кривым *1*—*7* на рис. 2 соответствуют значения константы $c \cdot 10^2$, равные 1, 2, 5, 10, 20, 40, 60.

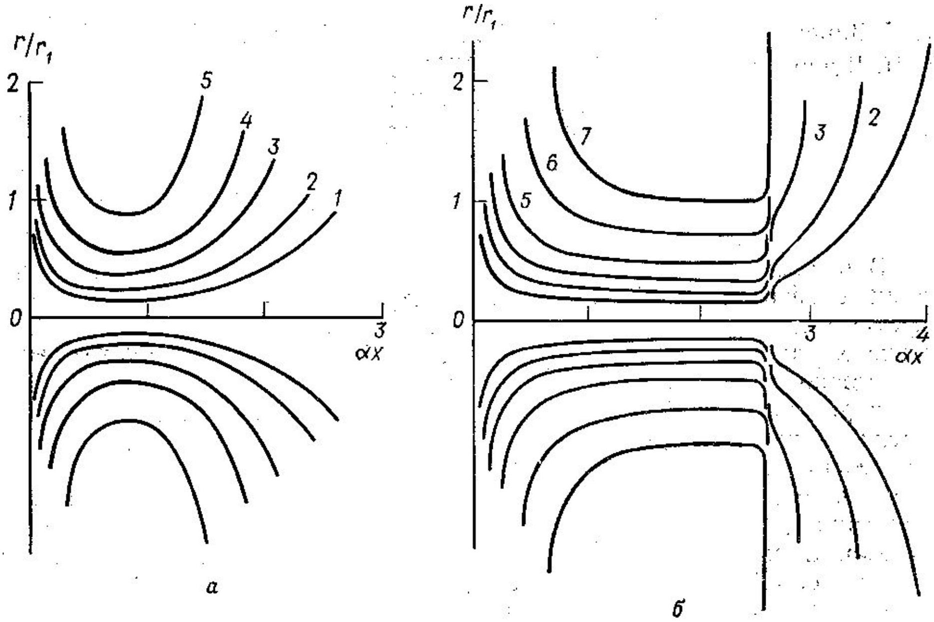

Рис. 2

В заключение укажем, что найденное точное решение нелинейной нестационарной задачи представляет интерес не только в связи с акустическими течениями, но и в теории гидродинамических струй, где подобные решения неизвестны [6]. Оно может также быть использовано как тест для отладки ЭВМ, поскольку даже численное решение системы (1), (2) сопряжено со значительными трудностями [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975.
2. Proc. 9-th International Congress on Acoustics, v. 2. Madrid, 1977.
3. Физические основы ультразвуковой технологии. Под ред. Л. Д. Розенберга. М., 1970.
4. Руденко О. В., Солуян С. И. «Акустический журнал», 1971, 17, 273—278.
5. Островский Л. А., Папилова И. А. «Акустический журнал», 1974, 20, 1, 79—86.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., 1973.
7. Кукаркин А. Б., Руденко О. В. «Акустический журнал», 1976, 22, 137—138.

МГУ. Кафедра
волновых процессов