УДК 534.222

Л. К. Зарембо
И. П. Чунчузов

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕННОСТИ ДИПОЛЬНОГО ИСТОЧНИКА МОЩНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ШУМА

В последние годы большое число работ было посвящено исследованию особенностей формирования характеристики направленности акустической параметрической антенны. Из этих работ следовало, что узкую характеристику для низкочастотного параметрического излучения можно получить в том случае, когда длина области взаимодействия первичных волн достаточно велика. При малых длинах характеристика направленности не только делается более широкой, но и принципиально меняется тип источника. Это, пожалуй, четче всего было показано в [1], где рассматривалась в основном трансформация характеристики дипольного параметрического излучателя и было показано, что характеристика направленности параметрического излучения представляет собой суперпозицию монополя и квадруполя, причем вклад каждого из этих вторичных источников зависит от длины антенны. Для источников недипольного характера это также имеет место. В этом смысле можно говорить о параметрической трансформации характеристики направленности.

Очевидно, что параметрическая трансформация характеристики имеет большое значение при исследовании угловой зависимости низкочастотной части шумового спектра мощных источников. Очевидно, что шум, исследуемый на некотором расстоянии от источников, может быть уже результатом параметрического взаимодействия на небольших длинах первичного шума и его угловые и спектральные характеристики могут резко отличаться от этих величин в первичном шуме.

Поскольку дипольные шумовые источники являются достаточно распространенной моделью реальных источников (винты самолетов и кораблей и др.), представлялось интересным рассмотреть именно их.

В волновой зоне $r > r_0$ первичное поле дипольного узкополосного шумового источника можно представить в виде

$$\rho'(r, \theta, t) = \frac{r_0}{2r} \cos\theta \{A_1(t) e^{j[\omega_1 t - k_1(r - r_0)]} + A_2(t) e^{j[\omega_2 t - k_2(r - r_0)]} + \text{к. с.}\}, \quad (1)$$

где ω_1 и ω_2 имеют смысл средних частот, $A_i(t) = A_{i_0} + A_i'(t)$ — комплексные амплитуды со случайно меняющейся частью $A_i' = B_i - jC_i$. Далее будем считать:

1) параметрический шум рассматривается в области частот, выше некоторой $\Omega_1 \sim (\omega_1 - \omega_2) - \frac{1}{2}(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)$ (это для достаточно узко-

[1] Зарембо Л. К., Чунчузов И. П. См.: Труды Всесоюзной акустической конференции. М., 1977.

полосных шумов $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$, таких, что $\Omega_1 > \max(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2)$, позволяет пренебречь параметрической автогенерацией шума каждым из источников);

2) шум вблизи частоты ω_1 некоррелирован с шумом вблизи ω_2, т. е.

$$\overline{B_1(t)B_2(t+\tau)} = B_{12}(\tau) = C_{12}(\tau) = 0;$$

3) энергетические спектры шумов симметричны

$$\overline{B_i(t)B_i(t+\tau)} = B_{ii}(\tau) = \overline{C_i(t)C_i(t+\tau)} = C_{ii}(\tau);\quad \overline{B_i(t)C_i(t+\tau)} = 0.$$

Правую часть уравнения второго приближения

$$\frac{\partial^2 \rho''}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta\rho'' = \frac{\gamma-1}{2\rho_0} c_0^2 \Delta\rho'^2 - \operatorname{div}\left(\mathbf{v}' \frac{\partial\rho'}{\partial t}\right) - \rho_0 \nabla (\mathbf{v}' \nabla)\mathbf{v}' \tag{2}$$

можно для параметрического излучения представить в виде плотности источников

$$q_\Omega(r, \theta, t) \simeq \frac{\omega_1\omega_2}{\rho_0} \frac{(k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2)}{k_1k_2} \frac{r_0^2}{r^2} \cos^2\theta \{f_1(t)\cos[\Omega t - K(r-r_0)] + $$
$$+ f_2(t)\sin[\Omega t - K(r-r_0)]\}, \tag{3}$$

где

$$f_1(t) = A_{10}A_{20} + A_{20}B_1 + A_{10}B_2 + B_1B_2 + C_1C_2,$$
$$f_2(t) = A_{10}C_2 + B_1C_2 - A_{20}C_1 - B_2C_1,\quad K = \frac{\Omega}{c_0}.$$

Решение неоднородного волнового уравнения (2) удовлетворяет условию излучения

$$\rho''_\Omega = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{q_\Omega(\mathbf{r}', -s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r', \tag{4}$$

где

$$s = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}.$$

Корреляционная функция параметрического шума:

$$B_\Omega(r, \theta, \tau) = \overline{\rho''_\Omega(r, t, \theta)\,\rho''_\Omega(r, \theta, t+\tau)} - \overline{\rho''_\Omega(r, \theta, t)}\;\overline{\rho''_\Omega(r, \theta, t-\tau)} =$$
$$= \frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_V \frac{\overline{q_\Omega(\mathbf{r}_1, s_1)\,q_\Omega(\mathbf{r}_2, s_2+\tau)} - \overline{q_\Omega(\mathbf{r}_1, s_1)}\;\overline{q_\Omega(r_2, s_2+\tau)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} d^3r_1 d^3r_2. \tag{5}$$

Вводя обозначения

$$F_{22}(\tau) = \overline{f_2(s_1)\,f_2(s_2+\tau)} = F_{11} - (A_{10}A_{20})^2,$$

легко видеть, что

$$F_{22}(\tau) = A_{10}^2 B_{22}(\tau) + A_{20}^2 B_{11}(\tau) + 2B_{11}(\tau)B_{22}(\tau),$$

и из (5)

$$B_\Omega(r, \theta, \tau) = Q_0^2 \iint\limits_V \frac{F_{22}(\sigma)\cos[\Omega\sigma - K(r_2-r_1)]}{r_1^2 r_2^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2\, d^3r_1\, d^3r_2, \tag{6}$$

где

$$\sigma = \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{c_0} - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}{c_0} + \tau,$$

$$\theta_0 = \frac{\omega_1\omega_2 r_0^2}{4\pi\rho_0 c_0^2}\left(\frac{k_1^2+k_2^2-k_1k_2}{k_1k_2}\right).$$

Представляя $F_{22}(\sigma)$ через ее спектральную плотность

$$F_0(\omega) = 4\int_0^\infty F_{22}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau,$$

из (6) следует

$$B_\Omega(r, \theta, \tau) = \operatorname{Re}\left\{\frac{Q_0^2}{2\pi}\int_0^\infty d\omega\, F_0(\omega)\iint_V d^3r_1\, d^3r_2 \times\right.$$

$$\times \frac{e^{j\omega\tau}e^{j\left\{(\omega+\Omega)\left[\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{c_0}-\frac{|\mathbf{r}-r_2|}{c_0}\right]-K(r_2-r_1)\right\}}}{|\mathbf{r}-r_1|\,|r-r_2|}\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2, \quad (7)$$

при этом интегралы по d^3r_1 и d^3r_2 разделяются и комплексно сопряжены.

Поэтому для расстояний $r \gg R_0 - r_0 = \delta$, где R_0 — верхняя граница области взаимодействия, и при условии $(\omega+\Omega)|\mathbf{r}_2|^2/c_0|\mathbf{r}| \ll 1$ из (7) следует

$$B_\Omega(r, \theta, \tau) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\pi^2 Q_0^2}{4r^2}\int_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega)\,|\psi_{k'}(\theta)|^2 e^{j(\omega+\Omega)\tau}\, d\omega\right\}, \quad (8)$$

где

$$\psi_{k'}(\theta) = \frac{4}{3}\left[\psi_{0k'} - 2\psi_{2k'}P_2(\cos\theta)\right], \quad (9)$$

$$\psi_{0k'} = \int_{r_0}^{R_0} j_0[(K+k_\omega)r']\,e^{-jKr'}\,dr'; \quad \psi_{2k'} = \int_{r_0}^{R_0} j_2[(K+k_\omega)r']\,e^{-jKr'}\,dr',$$

здесь $k_\omega = \omega/c_0$, $P_2(\cos\theta)$ — полином Лежандра 2-го порядка, j_0 и j_2 — сферические функции Бесселя.

Из (8) спектр мощности параметрического шума имеет вид

$$S(r, \theta, \omega) = \frac{\pi Q_0^2}{4r^2}F_0(\omega-\Omega)\,|\psi_{k'}(\theta)|^2, \quad (10)$$

где $k' = K + k_\omega$.

Естественно, что так же, как и в случае дипольных когерентных источников звука (см. ссылку на с. 120), характеристика направленности параметрического шума согласно (9) представляет собой суперпозицию шумового монополя и шумового квадруполя, причем вклад каждого из этих источников зависит не только от размеров области взаимодействия, но и от текущей частоты спектра.

Последние два соотношения в (9) могут быть проинтегрированы и представлены в виде:

для монополя

$$\psi_{0k'} = \frac{1}{2k'}\left[(\mathrm{si}\,\varphi_2 - \mathrm{si}\,\varphi_1 + \mathrm{si}\,\alpha_2 - \mathrm{si}\,\alpha_1) + j(\mathrm{ci}\,\varphi_2 - \mathrm{ci}\,\varphi_1 - \mathrm{ci}\,\alpha_2 - \mathrm{ci}\,\alpha_1)\right], \tag{11}$$

$$\varphi_2 = (K + k')R_0,\ \varphi_1 = (K + k')r_0;\ \alpha_2 = (k' - K)R_0,\ \alpha_1 = (k' - K)r_0$$

и для квадруполя

$$\begin{aligned}\psi_{2k'} = &\left[-\frac{3}{4}\frac{\varphi_2^2}{k'^3R_0^2}\left(\frac{\sin\varphi_2}{\varphi_2^2} - \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1^2}\right) + \frac{3\varphi_2\alpha_2}{4k'^3R_0^2}\left(\frac{\cos\varphi_2}{\varphi_2} - \frac{\cos\varphi_1}{\varphi_1}\right) + \right.\\ &+\left(\frac{3\varphi_2\alpha_2}{4k'^3R_0^2} - \frac{1}{2k'}\right)(\mathrm{si}\,\varphi_2 - \mathrm{si}\,\varphi_1) - \frac{3}{4}\frac{\alpha_2^2}{k'^3R_0^2}\left(\frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2^2} - \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1^2}\right) + \\ &\left.+\frac{3}{4}\frac{\alpha_2\varphi_2}{k'^3R_0^2}\left(\frac{\cos\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\cos\alpha_1}{\alpha_1}\right) + \left(\frac{3\alpha_2\varphi_2}{4k'^3R_0^2} - \frac{1}{2k'}\right)(\mathrm{si}\,\alpha_2 - \mathrm{si}\,\alpha_1)\right] + \\ &+ j\left[-\frac{3\varphi_2^3}{4k'^3R_0^2}\left(\frac{\cos\varphi_2}{\varphi_2^2} - \frac{\cos\varphi_1}{\varphi_1^2}\right) - \frac{3\alpha_2\varphi_2}{4k'^3R_0^2}\left(\frac{\sin\varphi_2}{\varphi_2} - \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1}\right) + \right.\\ &+\left(\frac{3\alpha_2\varphi_2}{4k'^3R_0^2} - \frac{1}{2k'}\right)(\mathrm{ci}\,\varphi_2 - \mathrm{ci}\,\varphi_1) + \frac{3\alpha_2^2}{4k'^3R_0^2}\left(\frac{\cos\alpha_2}{\alpha_2^2} - \frac{\cos\alpha_1}{\alpha_1^2}\right) + \\ &\left.+\frac{3\alpha_2\varphi_2}{4k'^3R_0^2}\left(\frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}\right) - \left(\frac{3\alpha_2\varphi_2}{4k'^3R_0^2} - \frac{1}{2k'}\right)(\mathrm{ci}\,\alpha_2 - \mathrm{ci}\,\alpha_1)\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, из (10) (12) видно, что спектр мощности параметрического шума определяется не только квадратичной комбинацией спектров мощности первичного шума $F_0(\omega)$, но также угловой и частотной зависимостью фактора $|\psi_{k'}(\theta)|^2$. Этот фактор, будучи нормирован, играет роль сечения параметрического рассеяния.

Если первичные шумы являются гауссовыми, то их квадратичная комбинация имеет вид

$$F_{22}(\tau) = A_{10}^2\sigma_2^2 e^{-\frac{\tau^2}{\tau_2^2}} + A_{20}^2\sigma_1^2 e^{-\frac{\tau^2}{\tau_1^2}} + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 e^{-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}}, \tag{13}$$

где $\tau_{1,2}$ и $\sigma_{1,2}$ — соответственно времена корреляции и дисперсии первичных шумов, $\tau_0^2 = \tau_1^2\tau_2^2/(\tau_1^2 + \tau_2^2)$.

Соответствующий $F_{22}(\tau)$ спектр $F_0(\omega)$ также представляет суперпозицию гауссовых спектров:

$$F_0(\omega) = 2\sqrt{\pi}\left(A_{10}^2\sigma_2^2\tau_2 e^{-\frac{\omega^2\tau_2^2}{4}} + A_{20}^2\sigma_1^2\tau_1 e^{-\frac{\omega^2\tau_1^2}{4}} + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 e^{-\frac{\omega^2\tau_0^2}{4}}\right). \tag{14}$$

Если $\Omega\tau_{1,2} \gg 1$, то из (8) и (9) следует, что

$$B_\Omega(r, \theta, \tau) = \frac{\pi^2\theta_0^2}{r^2}F_{22}(\tau)\cos\Omega\tau\,|\psi_{k'=k}(\theta)|^2. \tag{15}$$

Этот случай, при котором шумовые сигналы за время прохождения расстояния порядка $c_0/\Omega \sim \Lambda$ не меняются, соответствует почти когерентному шуму и, как видно из (15), в смысле характеристики направленности не отличается от случая детерминированных сигналов.

При этом спектральная плотность параметрического шума при изменении направления меняется по величине в соответствии с угловой зависимостью $\psi_k{}'_{=k}$, но имеет неизменную симметричную относительно Ω форму, определяемую функцией $F_0(\psi-\Omega)$. В общем случае, когда времена корреляции таковы, что $\Omega\tau_{1,2}>1$ и необходимо учитывать частотную зависимость фактора ψ, спектральная плотность параметрического шума изменяется также и по форме в каждом направлении θ.

Из-за плавного убывания $|\psi_{0k}|^2$ с ростом ω вблизи частоты Ω спектр параметрического шума становится асимметричным относительно частоты Ω.

МГУ. Кафедра акустики
Кафедра физики атмосферы