УДК 533.6.011.72

**А. И. Климов**

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Использовались термодинамический и динамический подходы для решения задачи об устойчивости плоской ударной волны в неоднородной среде. Для случая сильных ударных волн эти подходы дают эквивалентные результаты.

На устойчивом разрыве должны выполняться определенные соотношения, известные как условия совместности Гюгонио (условия совместности первого порядка). Н. Е. Кочину удалось решить задачу о распаде произвольного разрыва, пользуясь этими соотношениями и результатами теоремы Цемплена [1]. При этом предполагалось, что неустойчивый разрыв распадается на ряд устойчивых, а именно: ударные волны, контактные разрывы и непрерывные газодинамические течения. В [2] высказывается сомнение относительно строгости этого решения: утверждается, что контактный разрыв не может быть отнесен к разряду устойчивых.

Ряд работ посвящен устойчивости ударных волн в газе с постоянными параметрами [3—4]. При постановке такой задачи рассматривается взаимодействие плоской ударной волны, распространяющейся по однородному потоку газа с малым плоским возмущением этого потока. Согласно результатам этих работ неустойчивость возможна в диссоциирующихся и ионизирующихся с повышением температуры газах. Полагая, что для этих газов известна адиабата Гюгонио, можно выразить область неустойчивости следующим неравенством: $(dp/dv_H) \geqslant 0$, где $p$ — давление, $v$ — удельный объем, индекс $H$ означает, что производная берется вдоль адиабаты Гюгонио.

В обычных газах также возможна неустойчивость ударной волны при «резонансном» взаимодействии ее со звуковыми волнами, при этом последние должны падать под критическим углом на фронт ударной волны.

Для решения наиболее общей задачи об устойчивости ударных волн в неоднородной среде требуется привлечение условий совместности выше первого порядка [5], а также результатов теории термодинамической устойчивости равновесных и неравновесных процессов [6].

В данной работе предпринята попытка решения частной задачи данного типа: исследуется устойчивость ударной волны при условии, что газовый поток неоднороден за ее фронтом. Для простоты решения, не ограничивая при этом общности, получим для сильных ударных волн $M \gg 1$. Предполагается, что известны параметры потока за фронтом ударной волны: давление $p_2$, энтропия $s_2$, скорость $V_2$, которые зависят от одной переменной $x$, причем существуют первые, вторые производные этих величин $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$ и т. д.

Допустим, что на плоском фронте ударной волны возникло возмущение $\delta x(y, t)$, в результате флуктуации давления $f(x, y, t)$ в потоке за ее фронтом

$$p_2'(x, t) = p_2(x, t) + f(x, y, t); \quad \frac{f(x, y, t)}{p_2(x)} \ll 1.$$

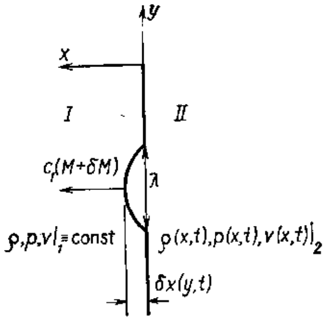


Рис.

Требуется определить условия, при которых возникшее возмущение будет расти со временем.

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением, полученным в [5] на основе условий совместности второго порядка на фронте ударной волны. Для нашего случая

$$\rho_1,\ p_1,\ V_1 \equiv \mathrm{const},\ M \gg 1$$

это уравнение имеет следующий вид:

$$\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{1}{M^2 c_1^2}\frac{dM}{dt}c_1 = -\frac{\gamma+1}{4}\frac{1}{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} + 2K, \qquad (1)$$

где $M$ — число Маха ударной волны, $c_1$ — скорость звука перед ней, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей, $p_2$ — давление газа за ударной волной, $K$ — средняя кривизна ударной волны, $V$ — скорость потока, $t$ — время, $\rho$ — плотность, $s$ — энтропия.

Напишем уравнение (1) для ударной волны в точке $x_0$

$$\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{1}{M^2 c_1^2}\frac{dM}{dt}c_1 = -\frac{\gamma+1}{4}\frac{1}{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x},$$

затем в точке $x_0 + \delta x$

$$\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{1}{(M+\delta M)^2 c_1^2}\left[\frac{dM}{dt} + \frac{d}{dt}(\delta M)\right]c_1 =$$

$$= -\frac{\gamma+1}{4}\frac{1}{p_2'}\frac{\partial}{\partial x}\left[p_2'(x_0+\delta x)\right] + 2K.$$

Учтем, что

$$\delta M c_1 = \frac{\partial}{\partial t}(\delta x) \equiv \delta x_t.$$

Вычитая одно выражение из другого и считая величины $\delta x$, $\frac{\partial}{\partial t}(\delta x)$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta x)$ одного порядка малости, а также выполняя разложение

$$\frac{\partial p_2(x_0+\delta x)}{\partial x} = \frac{\partial p_2(x_0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 p_2(x_0)}{\partial x^2}\delta x + \ldots,$$

получаем

$$\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{1}{M_2 c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta x) = -\frac{\gamma+1}{4}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial f}{\partial x}\right] + 2K. \qquad (2)$$

Рассмотрим наиболее важный случай длинноволнового возмущения на фронте ударной волны

$$\frac{\delta x(t, y)}{\lambda} \ll 1, \quad K \cong \delta x_{yy} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta x(y).$$

Предположим, что общее решение уравнения (2) представимо в виде

$$\delta x(y, t) \sim \exp[i(ky - \omega t)],$$

где $k$ — волновой вектор, $\omega$ — круговая частота. Тогда получаем для однородного уравнения (2)

$$\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{1}{M^2 c_1^2}\omega^2 = \frac{\gamma+1}{4}\left[\frac{1}{p_2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right] + 2k^2. \tag{3}$$

Полученное выражение описывает распространение на поверхности ударного фронта возмущений малой амплитуды с фазовой скоростью

$$\frac{\omega}{k} = Mc_1 \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\gamma}{2\gamma-1}\right)} \sqrt{\frac{\gamma+1}{4}\frac{1}{p_2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2k^2}. \tag{4}$$

Запишем условие появления неустойчивости

$$2k^2 + \frac{\gamma+1}{4}\frac{1}{p_2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \ll 0. \tag{5}$$

По внешнему виду выражение 3 напоминает дисперсионное соотношение для волн малой амплитуды на поверхности несжимаемой жидкости

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho},$$

где $\sigma$ — поверхностное натяжение, $g$ — ускорение свободного падения.

На основании результатов [6] получим критерий термодинамической устойчивости ударной волны для данной постановки задачи (кривизной возмущения пренебрегаем). Дополнительно покажем, что этот критерий эквивалентен условию устойчивости, вытекающему из анализа линеаризованного уравнения (2), в новых переменных $\rho$, $s$.

Будем считать:

а) газ идеальным, т. е. пренебрежем вязкостью и теплопроводностью

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (\hat{p} \text{ — тензор давления}),$$

б) внешние силы отсутствуют, $Fj_i = 0$,

в) газ однокомпонентным, $j = 1$.

Тогда для производства избыточной энтропии в области потока за фронтом ударной волны справедливо следующее выражение:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\delta^2(\rho, s)] =$$

$$= \underbrace{-\delta V\{(T^{-1})_{,x}\delta(\rho e) - (\mu T^{-1})_{,x}\delta\rho\} +}_{\mathrm{I}}$$

$$\underbrace{+V\{\delta(\rho e)(\delta T^{-1})_{,x}-\delta\rho\delta(\mu T^{-1})_{,x}\}+}_{\mathrm{II}}$$

$$\underbrace{+\{T^{-1}\,\delta p\,\delta V_{,x}+V_{,x}\delta(T^{-1})\,\delta p\}+}_{\mathrm{III}} \tag{6}$$

$$+\,(\text{поток избыточной энтропии}),$$

где $\mu$ — химический потенциал, $T$ — температура, $e$ — удельная внутренняя энергия, $A_{,x}\equiv\dfrac{\partial A}{\partial x}$, система координат выбрана в соответствии с рисунком.

Используем соотношение Гиббса — Дюгема

$$(\mu T^{-1})_{,x}=eT^{-1}_{,x}+\frac{1}{\rho}(pT^{-1})_{,x}.$$

Модифицируем исходное соотношение (6), применяя выражение первого закона термодинамики, а также рассматривая температуру $T$ как функцию переменных $\rho$, $s$

$$\frac{\delta T}{T}=\frac{\delta s}{c_v}+(\gamma-1)\frac{\delta\rho}{\rho},$$

$$\mathrm{I}\quad \delta V\rho\left\{\left[\frac{s_{,x}}{c_v}+(\gamma-1)\frac{\rho_{,x}}{\rho}\right]\frac{\delta s}{c_v}+\underline{(\gamma-1)\left[\frac{s_{,x}}{c_v}+\gamma\frac{\rho_{,x}}{\rho}\right]\frac{\delta\rho}{\rho}}\right\};$$

$$\mathrm{II}\quad -V\rho\left\{\left[\frac{s_{,x}}{c_v}+(\gamma-1)\frac{\rho_{,x}}{\rho}\right]\frac{\delta s}{c_v}\frac{\delta T}{\delta T}-\left[\frac{\delta s_{,x}}{c_v}+(\gamma-1)\frac{\delta\rho_{,x}}{\rho}\right]\frac{\delta s}{c_v}-\right.$$

$$\left.-\underline{\frac{\delta\rho}{\rho}\left[\frac{\delta p_{,x}}{p}-\frac{\delta p}{p}\frac{T_{,x}}{T}-\frac{p_{,x}}{p}\frac{\delta T}{T}\right]}\right\}; \tag{6a}$$

ниже будет показано, что подчеркнутые члены являются членами более высокого порядка малости, чем основные, в силу присутствия сомножителя $\dfrac{\delta\rho}{\rho}$.

Теперь необходимо связать производные и малые возмущения параметров потока за фронтом ударной волны с динамикой самого фронта. Для этого воспользуемся кинематическим условием совместности первого порядка, полученным в [7]:

$$\frac{d}{dt}[z_2-z_1]=\left[\frac{\partial z_2}{\partial t}-\frac{\partial z_1}{\partial t}\right]+M_1c_1\left[\frac{\partial z_2}{\partial a}-\frac{\partial z_1}{\partial a}\right];$$

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+Mc_1\frac{\partial}{\partial a}, \tag{7}$$

где $z$ — любая функция, определенная в областях I и II, терпящая разрыв на фронте волны, $a$ — лагранжева координата, соответствующая состоянию перед волной (область I) в начальный момент времени, а также уравнением (1), в переменных $\rho$, $s$.

$$-\frac{6}{M^2c_1}\frac{dM}{dt}=\frac{\gamma-1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x};\ M\gg 1; \tag{8}$$

$$\rho_1;\ p_1;\ V_1\equiv\mathrm{const},\ K=0.$$

Из условий на волне дополнительно следует

$$\frac{\delta p_2}{p_2} = \frac{\delta s_2}{c_v} = \frac{\delta T_2}{T_2} = \frac{2\delta M}{M}; \ \delta V_2 \cong \delta M c_1 \frac{\rho_1}{\rho_2};$$

$$\frac{\delta \rho_2}{\rho_2} = -\frac{4}{\gamma-1} \frac{\delta M}{M^3}; \ M \gg 1 . \tag{9}$$

Действительно, как известно, на фронте ударной волны

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$\frac{\delta p_2}{p_2} + \frac{\delta p_1}{p_1} \cong \frac{2\delta M}{M} \text{ и т. д.}$$

Воспользовавшись (7) и (8), легко показать, что для данной постановки задачи справедливо следующее выражение:

$$\frac{s_{,x}}{c_v} = -\frac{2\rho_{,x}(\gamma-1)}{\rho} = \frac{12}{M_1^2 c_1} \frac{dM}{dt}, \quad s_{,x} \equiv \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{10}$$

Согласно (7)

$$\frac{d}{dt}[s_2 - s_1] = Mc_1 \frac{\partial s_2}{\partial a} = Mc_1 \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial x},$$

так как

$$\left.\frac{\partial x}{\partial a}\right|_2 - \left.\frac{\partial x}{\partial a}\right|_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1.$$

Отсюда, используя (8), получим

$$\frac{s_{,x}}{c_v} = -\frac{2\rho_{,x}}{\rho}(\gamma-1),$$

так как

$$\frac{d}{dt}[s_2 - s_1] \cong c_v \frac{2}{M} \frac{dM}{dt}, \ M \gg 1.$$

Для вычисления $\delta V_{,x}$ в члене III воспользуемся уравнением непрерывности области II:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) = -[V + \delta V]_{,x} \cdot [\rho + \delta\rho]_{,x};$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt}(\delta\rho) = -\frac{\delta V}{\rho} \rho_{,x} - \frac{\delta\rho}{\rho} V_{,x} - \delta V_{,x}; \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x};$$

кроме того,

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -V_{,x}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{4}{\gamma-1} \frac{1}{M^3} \frac{dM}{dt}.$$

Поэтому при $M \gg 1$

$$\delta V_{,x} \cong -\frac{\delta V}{\rho} \rho_{,x} \sim \frac{1}{M^2}. \tag{11}$$

Из (6а), (8), (9), (11), а также учитывая (10), следует, что

$$\text{I} \quad -\frac{\delta s}{c_v} \delta V \frac{(\gamma-1)}{\rho} \rho_{,x},$$

$$\text{II} \quad +\frac{\delta s}{c_v} \frac{\delta T}{T} \frac{T_{,x}}{T} V - \frac{\delta s}{c_v} \delta \left[\frac{T_{,x}}{T}\right] V,$$

$$\text{III} \quad -(\gamma-1)\frac{\delta p}{p}\frac{\rho_{,x}}{\rho}\delta V.$$

Как и ранее, можно получить выражение для $(\delta x)_{tt}$ в новых переменных $\rho, s$:

$$-\frac{6}{M^2 c_1^2}(\delta x)_{tt} = \frac{\gamma-1}{\rho}\delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \tag{12}$$

Считая величины $\delta x$, $(\delta x)_t$, $(\delta x)_{tt}$ одного порядка малости, а также учитывая (12), в итоге имеем

$$\frac{1}{2\rho c_v}\frac{\partial}{\partial t}[\delta^2(\rho s)] = -\frac{1}{\rho}\delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)(\gamma-1)c_1\delta M = \delta M(\delta M)_t.$$

Согласно [6] неустойчивость возникает при условии

$$\delta M\cdot(\delta M)_t \geqslant 0 \text{ или } (\delta x)_t\cdot(\delta x)_{tt} \geqslant 0. \tag{13}$$

Так как решение уравнения (12) $\sim\exp(\mu^2 t)$, то критерий *термодинамической неустойчивости* эквивалентен требованию

$$\mu \geqslant 0. \tag{14}$$

В этом и только в этом случае выполняется неравенство (13). Одновременно (14) означает рост со временем малых возмущений на фронте ударной волны.

В заключение сделаем некоторые выводы. До сих пор не существует общепринятого определения устойчивости ударных волн. Метод термодинамической устойчивости в совокупности с условиями совместности позволяет вполне строго решить любую задачу данного типа. Указанный подход к поставленной выше задаче дает такой же результат, как и чисто динамический подход, основанный на использовании линеаризованных условий совместности для сильных ударных волн $|M\gg 1|$.

Согласно (5) в эксперименте следует ожидать возмущения со спектром длин волн, ограниченных сверху $\lambda_* = \frac{2\pi}{k_*}$. В ударных трубах дополнительное условие накладывает наличие стенок $l\times l$ см$^2$. Возмущенный фронт ударной волны будет испытывать маховское отражение от этих стенок и становиться со временем все более плоским. Иными словами, при этом возникают процессы, производящие демфирующее действие на возмущенный ударный фронт. Следовательно, $\lambda$ должна быть меньше размеров ударной трубы. Наиболее быстро растут со временем возмущения вида $\lambda\sim l$. Отсюда следует их доминирующая роль в опытах по неустойчивости ударных волн.

Автор выражает благодарность проф. Е. В. Ступоченко и доц. Ф. В. Шугаеву за обсуждение полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч., т. 2. М., 1949.
2. Griffits R. W. «J. Phys. D. Appl. Phys.», 1975, 8, 32—40.
3. Дьяков С. П. ЖЭТФ, 1954, 27, вып. 3 (3), 295—298.
4. Fowles G. R., Swan G. W. «Phys. Fluid.», 1975, 18, N 1, 151—160.
5. Пригожин И., Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., 1973.
6. Шугаев Ф. В. «Вычислит. матем. и матем. физика», 1976, 16, № 3, 797—800.
7. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., 1973.

Поступила в редакцию
1.6 1977 г.
Кафедра
молекулярной физики