

УДК 530.12

В. Н. Пономарев
Е. В. СметанинНОВЫЙ ВАРИАНТ НЕЛИНЕЙНОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ (I)

Получены уравнения нелинейного электромагнитного поля (и поля Прока), нелинейность которого появлялась за счет спин-спинового взаимодействия, индуцированного кручением пространства-времени, а также изучены электростатические решения этих уравнений как в пространстве Минковского, так и с учетом пространственно-временной кривизны.

Введение. Несомненным является тот факт, что по мере роста доступных измерению энергий элементарных частиц эффекты нелинейности волновых полей, учитывающих их самодействие, будут играть существенную роль¹. Они могут сказаться не только в уточнении уже известных процессов на более глубоком уровне строения материи, но, по-видимому, и в качественном изменении представлений о структуре элементарных частиц. Возможно также, что на этом уровне следует учитывать гравитационные взаимодействия, которые по своей природе сильно нелинейны, а потому будут проявляться в виде эффективных нелинейностей соответствующих материальных полей. Это обусловило возросший интерес к исследованию нелинейности волновых уравнений [1, 2].

В настоящей работе мы изучим некоторые специфические нелинейные эффекты электродинамики, порожденные кручением пространства-времени, в рамках общерелятивистской теории гравитационных взаимодействий Эйнштейна — Картана [3].

Рассмотрение подобной задачи для спинорных уравнений уже привело к интересной аналогии между нейтрино и нелинейными спинорными полями (минимальная нелинейность типа Ψ^3) [4]. Уравнения гравитационного и электромагнитного полей выводятся [5] путем независимого варьирования по метрическому тензору $g_{\mu\nu}$, метрической аффинной связности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, электромагнитным потенциалам A_μ и неопределенным множителям Лагранжа $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ действия

$$S = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (R + bF_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta\gamma}\nabla^\alpha g^{\beta\gamma}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

где R — скалярная кривизна связности $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}$,

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + 2Q^\nu{}_{\alpha\beta} A_\nu = \tilde{F}_{\alpha\beta} + 2Q^\nu{}_{\alpha\beta} A_\nu$$

¹ Не говоря уже о том, что они будут доминировать при экстремальных плотностях материи, к которым приводит процесс гравитационного коллапса в астрофизике.

—тензор электромагнитного поля, $Q^{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}{}_{[\alpha\beta]}$ — тензор кручения, ∇_{α} — ковариантная производная связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, $\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$; $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}$,

$$b = \frac{k}{c^4} = 0,82 \cdot 10^{-49} \text{ с}^2/\text{Г}\cdot\text{см};$$

$k = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ с}^2/\text{Г}\cdot\text{см}$ — ньютонова гравитационная постоянная. Эти уравнения имеют вид [6, 7]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi b E_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

$$(\nabla_{\alpha} - 2Q_{\alpha}) F^{\alpha\gamma} = 0, \quad (3)$$

$$Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + 2\delta^{\alpha}{}_{[\beta} Q_{\gamma]} = 8\pi bc S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}, \quad (4)$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} + Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + 2Q_{(\beta\gamma)}{}^{\alpha},$$

где $E_{\alpha\beta}$ — симметричная часть канонического тензора энергии-импульса электромагнитного поля, $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi c} A_{[\beta} F_{\gamma]}{}^{\alpha}$ — его спиновый момент, $Q_{\alpha} = Q^{\alpha}{}_{\alpha\beta}$ — след тензора кручения, $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}$ — символы Кристоффеля. Заметим, что R представима в виде

$$R = \tilde{R} - [4Q_{\alpha} Q^{\alpha} + Q^{\alpha\beta\gamma} (Q_{\beta\gamma\alpha} + Q_{\gamma\alpha\beta} + Q_{\alpha\gamma\beta})],$$

если учесть условие метричности связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, т. е. $\nabla_{\alpha} g_{\beta\gamma} = 0$, \tilde{R} — скалярная кривизна связности $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}$.

Разрешаем систему уравнений (4) относительно тензора кручения

$$Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha}{}_{[\gamma} Q_{\beta]} + 2b A_{[\beta} \tilde{F}_{\gamma]}{}^{\alpha} + 4b A^{\alpha} A_{[\gamma} Q_{\beta]}, \quad (5)$$

где

$$Q_{\beta} = \frac{b}{2} A_{\alpha} F_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{b}{2} \frac{\tilde{F}_{\beta\alpha} A^{\alpha}}{1 + bA^2}, \quad A^2 = A_{\mu} A^{\mu}, \quad Q_{\mu} A^{\mu} = 0.$$

Подставляя (5) в (3), получим обобщенное нелинейное уравнение Максвелла, нелинейность которого обусловлена кручением пространства-времени, индуцированного в свою очередь спином электромагнитного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = \frac{4\pi}{c} J^{\beta}, \quad (6)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{2b A_{[\mu} \tilde{F}_{\nu]}{}^{\gamma} A_{\gamma}}{1 + bA^2}, \quad J^{\beta} = -\frac{bc}{4\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\gamma} A^{\gamma}$$

можно формально считать (как мы убедимся) 4-вектором электромагнитного тока. Заметим, что $\nabla_{\beta} J^{\beta} = 0$ (символ \sim обозначает объекты риманового пространства).

Аналогично тому, как мы поступали при выводе уравнения (6), исключая кручение с помощью (5) из (2), мы получим

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} = 8\pi b \tilde{E}_{\alpha\beta}^{\text{нел}}, \quad (7)$$

где $\tilde{E}_{\alpha\beta}^{\text{нел}}$ — тензор энергии-импульса нелинейного электромагнитного поля, описываемого (6).

Таким образом, система уравнений (2) — (4) в пространстве Римана — Картана сводится к системе уравнений Эйнштейна (7) и нелинейного электромагнитного поля (6) в римановом пространстве, которая выводится из действия

$$S = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (R - 16\pi b \mathcal{L}_{\text{э.м.}}^{\text{нел}}) \sqrt{-g} d^4x = \\ = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (\tilde{R} + bF_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2b^2 F_{\gamma\beta} F^{\gamma\alpha} A_{\alpha} A^{\beta}) \sqrt{-g} d^4x \quad (8)$$

путём независимого варьирования по метрическому тензору и электромагнитным потенциалам. Действие (8) можно получить и с помощью прямой подстановки (5) в выражение (1) ².

Уравнение (6) в пространстве Минковского может быть переписано в трехмерном виде

$$\text{div } \mathbf{E} = bE^2 A_0 + b (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + b\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{A}) - bA_0[\mathbf{H} \times \mathbf{E}] - b\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^2\} + b\{\mathbf{H} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{A})\}, \quad (9)$$

где компоненты вектора $\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{D})\}$ по определению равны $\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{D})\}_1 = A_1[(\mathbf{C}\mathbf{D}) - C_1 D_1]$ (аналогично остальные компоненты). Здесь мы определили напряженности электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} через тензор Γ , являющийся ковариантным обобщением соответствующего тензора электромагнитного поля $\tilde{F}_{\alpha\beta}$. Лагранжиан, приводящий к уравнениям (9), в терминах \mathbf{E} и \mathbf{H} будет иметь вид

$$\mathcal{L}_{\text{э.м.}}^{\text{нел}} = \frac{1}{8\pi} \{E^2 + H^2 + b[E^2 A_0^2 - 2A_0(\mathbf{A}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]) - (\mathbf{E}\mathbf{A})^2 + [\mathbf{H} \times \mathbf{A}]^2\}.$$

Важно подчеркнуть, что введение кручения пространства-времени, приводящее к нелинейным калибровочно-неинвариантным уравнениям электромагнитного поля (6) ³, получающимся ковариантным обобщением уравнений Максвелла, вместе с тем не затрагивает законов сохранения [8].

Процедура замены частных производных на ковариантные в лагранжиане материи обусловлена требованием общей ковариантности теории. Исключением являются лагранжианы калибровочных полей, ковариантные с самого начала. Далее, из-за калибровочной неинвариантности спина калибровочного поля применение указанной процедуры нарушит калибровочную инвариантность уравнений таких полей, что заставляет ряд авторов [9] отказаться от введения взаимодействия кручения с калибровочными полями. Но это нарушает единообразие введения взаимодействия между полями ⁴, и, по нашему мнению, преж-

² Заметим, что полученный вариант нелинейной электродинамики переходит в линейную теорию Максвелла при наложении калибровки $\tilde{F}_{\mu\nu} A^\nu = 0$.

³ Нечто подобное происходило и при ковариантном обобщении спинорных, нейтринных (безмассовых) уравнений, когда нарушалась их конформная инвариантность. Но до настоящего времени неизвестны какие-либо физические следствия, к которым приводит факт наличия или отсутствия их конформной инвариантности.

⁴ Хель считает вместе с тем, что поле Прока может взаимодействовать с кручением, что, на наш взгляд, кажется непоследовательным. Непоследовательным является также дуалистическая точка зрения, что электромагнитное поле, хотя и не порождает кручения, но может взаимодействовать с кручением внешних материальных полей со спином [10].

двременно считать тот или другой путь единственно правильным и окончательным. Выяснить правильность выбора пути может только дальнейший анализ физических следствий и прежде всего эксперимент.

Итак, мы будем исследовать эффекты нелинейной электродинамики, основываясь на уравнении (6).

После сделанных общих замечаний, касающихся вывода и обоснования нелинейного ковариантного уравнения Максвелла, мы перейдем к исследованию его решений.

§ 1. Электростатические решения нелинейного уравнения. Прежде всего рассмотрим электростатические решения уравнения (6) в пространстве Минковского. Электромагнитные потенциалы задаем в виде $A_\mu = (\varphi(x^i), 0, 0, 0)$. Тогда система уравнений (9) (эквивалентная (6)) сведется к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (10)$$

где

$$E_i = F_{0i} = \frac{\tilde{F}_{0i}}{1 + b\varphi^2}, \quad \rho = \frac{b}{4\pi} E^2 \varphi.$$

В случае центральной симметрии $\varphi(x^i) := \varphi(r)$, (10) перепишем в виде уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) (1 + b\varphi^2) - b \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \varphi = 0,$$

решение которого⁵

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{sh} \left(\frac{c_1}{r} + c_2 \right) \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Требую выполнения закона Кулона при $r \rightarrow \infty$, получим

$$\varphi(r) \approx \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{b} \frac{q}{r} \right), \quad (11)$$

где q — постоянная, имеющая размерность заряда.

Исходя из полученного решения для φ (11), вычислим \mathbf{E} и ρ :

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0) = \frac{q}{\operatorname{ch} \left(\sqrt{b} \frac{q}{r} \right)} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \rho = \frac{\sqrt{b}}{4\pi} \frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt{b} \frac{q}{r} \right)}{\operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{b} \frac{q}{r} \right)} \frac{q^2}{r^4}.$$

Исследуем поведение напряженности поля

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} E = 0.$$

Максимум E находится из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{b} q}{r} \right) = \frac{2}{\sqrt{b} \frac{q}{r}}, \quad \text{откуда } r_{E_{\max}} \approx \frac{\sqrt{b} q}{2,1}, \quad E_{\max} \approx \frac{1}{bq},$$

для заряда электрона

$$q = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ}, \quad r_{E_{\max}} = 0,7 \cdot 10^{-34} \text{ см.}$$

⁵ Это решение независимо было получено также Туняком (устное сообщение).

Следует отметить, что при увеличении заряда $r_{E_{\max}}$ растет, а E_{\max} уменьшается. Качественное поведение E изображено на рис. 1 (пунктирная линия соответствует закону Кулона максвелловской электродинамики).

Обратимся к $\rho(r)$. Заметим прежде всего, что $\int \rho dv = q$, поэтому и можно формально рассматривать $\rho(r)$ как плотность распределения заряда q . Исследуем поведение $\rho(r)$; $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} \rho = 0$, максимум ρ находится из трансцендентного уравнения

$$\text{sh } \eta \left(\eta \text{ sh } \eta - \frac{1}{4} \text{ch } \eta \right) = \eta \quad \left(\text{здесь } \eta = \sqrt{b} \frac{q}{r} \right),$$

откуда

$$r_{\rho_{\max}} \cong \sqrt{b} q, \text{ а } \rho_{\max} \cong \frac{3,94 \cdot 10^{-2}}{b^{3/2} q^2}.$$

Для заряда электрона $r_{\rho_{\max}} \cong 1,04 \cdot 10^{-34}$ см. Качественная зависимость $r_{\rho_{\max}}(q)$, $\rho_{\max}(q)$ аналогична соответствующей зависимости $r_{E_{\max}}(q)$ и $E_{\max}(q)$. Поведение ρ представлено на рис. 2.

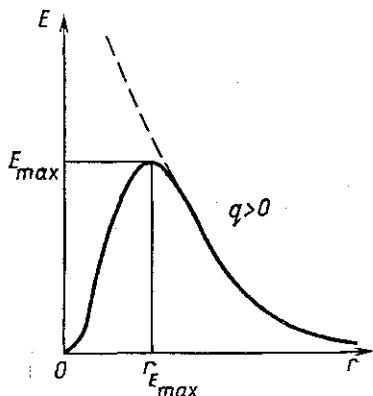


Рис. 1

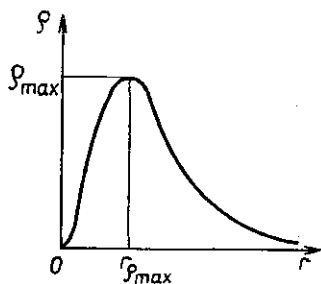


Рис. 2

Отметим, что 99% заряда электрона сосредоточено под сферой радиуса $r = 1,05 \cdot 10^{-33}$ см.

Найдем энергию электромагнитного поля, соответствующего нашему решению. Для этого выпишем общий вид канонического и метрического тензора энергии-импульса

$$E_{\alpha\beta}^{\text{met}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -F_{\alpha\nu} F_{\beta}{}^{\nu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + \frac{b}{2} (F_{\nu\mu} F^{\nu\nu} A^{\mu} A_{\nu} g_{\alpha\beta} - 2F_{\alpha\nu} A^{\nu} F_{\beta\nu} A^{\nu}) \right\}, \quad (12)$$

$$E_{\alpha\beta}^{\text{can}} = E_{\alpha\beta}^{\text{met}} - t_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{\text{met}} + \frac{1}{4\pi} (F^{\nu}_{\beta} A_{\alpha,\nu} - b F_{\nu\beta} F^{\nu\nu} A_{\nu} A^{\alpha}).$$

Причем в силу уравнений движения (6) $E_{\text{met},\beta}^{\alpha\beta} = E_{\text{can},\beta}^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$. Для полученного электростатического центрально-симметричного решения

$$\mathcal{H} = E_{\text{met}}^{\text{00}} = \frac{E^2}{8\pi} - \frac{\rho\Phi}{2}.$$

Первое слагаемое аналогично плотности энергии линейного электромагнитного поля, в то время как второе слагаемое можно интерпретировать как плотность энергии самодействия этого поля (заметьте, что второе слагаемое сингулярно в нуле). Вычислим массу электромагнитного поля без учета расходящейся энергии самодействия

$$m_{э.м.} = \frac{W_{э.м.}}{c^2} = \frac{\int \frac{E^2}{8\pi} d^3x}{c^2} = \frac{|q|}{2\sqrt{b}c^2} = \frac{|q|}{2\sqrt{k}}.$$

Для заряда электрона $m_{э.м.} = 0,93 \cdot 10^{-6}$ гр, т. е. равна массе классического максона Маркова [11]. Отметим, что, варьируя постоянную b , можно получить классические параметры «элементарных частиц» ($m_{э.м.}$, $r_{E_{\max}}$). Изменение b достигается, если принять общегеометрическую концепцию при рассмотрении нашей задачи, т. е. выбрать в качестве исходных независимых геометрополевых переменных фундаментальное метрическое поле, поле связности, поле вектора кручения и построить соответствующие им лагранжианы с произвольными константами [12, 13].

Центрально-симметричный случай. Искривленное пространство-время. Отклонение нашей модели от соответствующих моделей классической линейной электродинамики происходит на расстояниях порядка 10^{-33} см, где эффекты классического метрического гравитационного поля (не говоря уже о квантовом) будут существенны и могут привести к качественному изменению ее поведения. Поэтому необходимо рассмотрение совместной системы уравнений (6) и (7). Такое решение в статическом сферически-симметричном случае, учитывающем влияние массы центрального объекта на поведение нелинейного электромагнитного поля, было получено Туняком [6]. Это решение имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} [e^{2\alpha}, -e^{2\beta}, -e^{2\beta}, -e^{2\beta}],$$

$$\alpha = \gamma + \frac{m_0^2}{4m^2} (e^{2\gamma} - 1 - 2\gamma),$$

$$\beta = \ln \left[1 + \frac{r_g^2 (m_0^2 - m^2)}{m^2 r^2} \right] - \alpha,$$

$$\varphi = \frac{q}{4r_g} (1 - e^{2\gamma}) \exp \left[\frac{m_0^2}{4m^2} (e^{2\gamma} - 1 - 2\gamma) \right],$$

$m_0 = \frac{q}{\sqrt{k}}$, $r_g = \frac{km}{2c^2}$; q и m — соответственно заряд и масса центрального объекта,

$$\gamma = \begin{cases} \text{а) } \frac{2m}{\sqrt{m_0^2 - m^2}} \arctg \left(-\frac{r_g \sqrt{m_0^2 - m^2}}{mr} \right) & 0 < m^2 < m_0^2 \\ \text{б) } -\frac{2r_g}{r} & m^2 = m_0^2 \\ \text{в) } \frac{m}{\sqrt{m^2 - m_0^2}} \ln \frac{mr - r_g \sqrt{m^2 - m_0^2}}{mr + r_g \sqrt{m^2 - m_0^2}} & m^2 > m_0^2 \end{cases}$$

Заметим, что в случае в) имеется горизонт событий при

$$r = \tilde{r}_g = \frac{rg}{m} \sqrt{m^2 - m_0^2}.$$

Исследуем поведение потенциала φ . При любых m и при $r \rightarrow \infty$ φ ведет себя как кулоновский потенциал $\varphi/r \rightarrow \infty \sim q/r$.

Асимптотика φ в нуле (или при $r \rightarrow \tilde{r}_g$) имеет вид

$$\text{а) } \varphi \sim \frac{q}{4r_g} (1 - e^{-\gamma^*}) \exp \left[\frac{m_0^2}{4m^2} (e^{-\gamma^*} - 1 + \gamma^*) \right] = \text{const}$$

$$\left(\gamma^* = \frac{2m\pi}{\sqrt{m_0^2 - m^2}} \right),$$

$$\text{б) } \varphi \sim \frac{q}{4r_g} \exp \left[\frac{m_0^2}{m^2} \left(\frac{rg}{r} - \frac{1}{4} \right) \right] \rightarrow \infty,$$

$$\text{в) } \varphi \sim \frac{q}{4r_g} \exp \left(-\frac{m_0^2}{4m^2} \right) \left(\frac{r + \tilde{r}_g}{r - \tilde{r}_g} \right)^{\frac{m_0^2}{2m\sqrt{m^2 - m_0^2}}} \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы получить физические компоненты напряженности электрического поля, запишем уравнение (6) в хронометрически-инвариантном виде [14, 15]

$${}^* \tilde{\nabla}_i E^i = 4\pi J,$$

где

$$E^i = \frac{F_0^i}{\sqrt{g_{00}}}; \quad J = \frac{J_0}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{b}{4\pi} \frac{\tilde{F}^{i0} \tilde{F}_{i0} \varphi}{(1 + b\varphi^2 g^{00})^2 \sqrt{g_{00}}},$$

а ${}^* \tilde{\nabla}$ — трехмерная хронометрически-инвариантная ковариантная производная,

$$E^i = E = \frac{q}{r^2} \exp \left[\frac{m_0^2}{2m^2} (e^{2\gamma} - 1 - 2\gamma) \right] \frac{e^{3\gamma}}{\left(1 + \frac{r_g^2 (m_0^2 - m^2)}{m^2 r^2} \right)^3},$$

$$E^2 = E^3 = 0,$$

$$J = \frac{b}{4\pi} \frac{q^2}{4r_g} \exp \left[\frac{m_0^2}{2m^2} (e^{2\gamma} - 1 - 2\gamma) \right] \frac{e^{3\gamma} (1 - e^{2\gamma})}{\left(1 + \frac{r_g^2 (m_0^2 - m^2)}{m^2 r^2} \right)^4} \frac{1}{r^4}.$$

Качественная зависимость $E(r)$ и $J(r)$ приведена на рисунках 3 и 4.

Найдем полный заряд $q^* = \int J \sqrt{h} d^3x$ ($h = \det(-g_{ik})$), соответствующий распределению J

$$q^* = \begin{cases} \text{а) } q \left(1 - \exp \left[-\frac{m_0^2}{4m^2} (e^{-\gamma^*} - 1 + \gamma^*) \right] \right) \\ \text{б) } q \\ \text{в) } q^6 \end{cases}$$

Зависимость $g^*(m)$ можно проследить на рис. 5.

⁶ При $m \geq 1,1 m_0$ $q^* = q$ в смысле главного значения соответствующего интеграла.

Мы видим, что при $0 < m^2 < m_0^2 q^*$ меньше наблюдаемого на асимптотике значения заряда q ($E \sim \frac{q}{r^2}$). Вопрос о физической интерпретации этого факта остается неясным. Вычислим энергию нашего нелинейного электромагнитного поля по метрическому тензору энергии-импульса (12). Плотность энергии равна

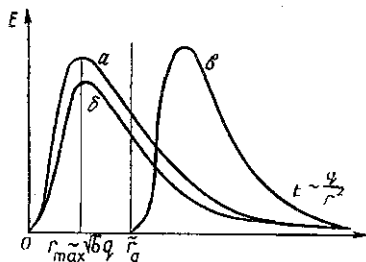


Рис. 3

$$\mathcal{H} = E_{0\text{met}}^0 = \frac{E^2}{8\pi} - \frac{1}{2} J \frac{\Phi}{\sqrt{g_{00}}}$$

Первое слагаемое, соответствующее энергии электрического поля, при любом m конечно. Второе слагаемое, соответствующее самодействию электромагнитного поля, в случаях б) и в) сингулярно в нуле (или $r = r_g$), так же как и без учета гравитационного взаимодействия, в то

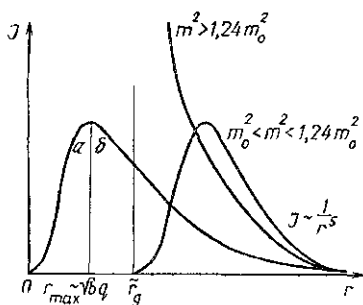


Рис. 4

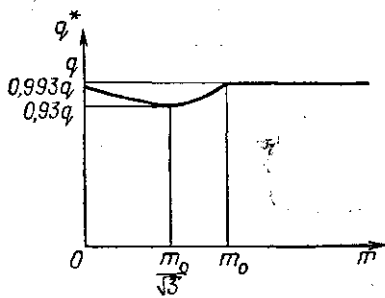


Рис. 5

время как в случае а) конечно. Вычислим для случая а) полную энергию $W = W_{\text{э.м.}} + W_{\text{самодействия}}$

$$W = \int E_{0\text{met}}^0 \sqrt{\bar{h}} d^3x = \int \left(\frac{E^2}{8\pi} - \frac{1}{2} J \frac{\Phi}{\sqrt{g_{00}}} \right) \sqrt{\bar{h}} d^3x.$$

Численные расчеты показывают, что при любых массах m ($0 < m^2 < m_0^2$) энергия самодействия оказывается больше собственной энергии нелинейного электромагнитного поля (по модулю).

§ 2. Поле Прока. Рассмотрим нелинейное уравнение для массивного векторного поля, которое получается аналогично (6) исключением кручения с помощью (5) ⁷

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) + m^2 A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta. \tag{13}$$

В электростатическом сферически-симметричном случае ($A_\mu = (\varphi(r), 0, 0, 0)$) получаем уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) = m^2 \text{sh } \eta.$$

Здесь $\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{sh } \frac{\eta}{2}$.

⁷ Впервые поле Прока, взаимодействующее с полем кручения, рассматривалось в [16].

Для малых η имеем $\eta \sim \frac{e^{-mr}}{r}$, т. е. решение асимптотически при $r \rightarrow \infty$ переходит в потенциал Юкавы.

К интересным следствиям приводит рассмотрение случая $A_\mu = (0, 0, A_2(x, t), 0)$. Тогда уравнение (13) переходит в известное уравнение \sin -Гордона

$$\square \varphi + m^2 \sin \varphi = 0,$$

где
$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \varphi = 2 \arcsin \sqrt{b} A_2.$$

Это уравнение достаточно изучено [17] и, в частности, используя его односолитонное решение

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{m(x - vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right], \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right),$$

получим

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{sch} \left(\frac{m(x - vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

В заключение отметим открытую Коулманом [18] связь уравнения \sin -Гордона (а следовательно, и рассматриваемого векторного поля) с нелинейным спинорным уравнением модели Тирринга [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Heisenberg W. «Phys. Today», 1967, 20, 27.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
3. Nehl F., von der Heyde P., Kerlick G. D., Nester J. «Rev. Mod. Phys.», 1976, 48, 393.
4. Кречет В. Г., Пономарев В. Н. «Теор. и матем. физика», 1975, 25, 141.
5. Korczunski W. «Bull. Acad. Pol. Sci (mat. astr., phys.)», 1975, 23, 467.
6. Туняк В. Н. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. науки», 1972, 2, 114.
7. Пономарев В. Н., Сметанин Е. В. «Изв. вузов. Физика», 1978, 21, № 8.
8. Clashow S. L., Gell-Mann M. «Ann. of Phys.», 1961, 15, 437.
9. Trautman A. «Sym. Math.», 1973, 12, 139.
10. Prossana R. «Phys. Lett», 1975, 54A, 342.
11. Марков М. А. В сб.: «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц». Киев, 1967, с. 671.
12. Пономарев В. Н., Обухов Ю. Н. В сб.: «Гравитация и относительность». Казань, 1977.
13. Пономарев В. Н., Кречет В. Г., Пронин П. И. «Изв. вузов. Физика», 1977, 21, 3.
14. Зельманов А. Л. ДАН СССР, 1959, 124, вып. 5, 1030.
15. Иваненко Д. Д., Владимиров Ю. С. Теория гравитации, ч. 1. М., 1970.
16. Рочев В. Н. «Теор. и матем. физ.», 1975, 25, 141.
17. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. ДАН СССР, 1974, 219, 1334.
18. Thirring W. «Ann. Phys. (N. 7)», 1958, 3, 91.

Поступила в редакцию
17.6 1977 г.
Кафедра
теоретической физики