УДК 539.12.01

Б. К. Керимов
М. Я. Сафин
И. М. Аль Хамис (Ирак)

О КУЛОНОВСКОЙ ПОПРАВКЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА В УПРУГОМ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ЯДРАМИ В ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ

Получены точные и приближенные выражения для поправки второго борновского приближения $\delta M^{(c)}$ к амплитуде упругого рассеяния электронов ядрами с учетом форм-факторов распределения заряда оболочечной модели. Показано, что в рассматриваемом приближении логарифмически расходящаяся по регуляризирующей массе фотона часть поправки может быть выделена в фазовый множитель амплитуды. Влияние регулярной части $\delta M^{(c)}$ на сечение первого борновского приближения иллюстрируется на примере ядра-мишени C^{12} графически.

Упругое рассеяние электронов ядрами является важным методом изучения их электромагнитной структуры, в частности распределения заряда внутри ядра. В случае легких ядер обычно предполагается справедливость первого борновского приближения, при этом экспериментальные данные непосредственно дают информацию о форм-факторе ядра, являющемся фурье-образом пространственного распределения заряда. Рост энергии электронных пучков и соответствующее увеличение изучаемого интервала передаваемых импульсов, с одной стороны, позволяет исследовать электромагнитную структуру ядер на все более малых расстояниях, а с другой стороны, ставит вопрос о роли поправок к борновскому приближению за счет многофотонных процессов, так как появляются экспериментальные данные, не укладывающиеся в рамки механизма однофотонного обмена. Первое борновское приближение становится недостаточным также в случае тяжелых ядер из-за сильного искажения падающей и рассеянной волн кулоновским полем.

При обработке экспериментальных данных часто используется традиционная техника фазового анализа, заключающаяся в численном решении уравнения Дирака при заданном законе распределения заряда ядра с помощью специально разработанных комплексов программ для ЭВМ [1]. В рамках теории возмущений это соответствует учету высших степеней разложения амплитуды в ряд по параметру $Z\alpha$. Если принять во внимание то, что ядро является составным объектом, имеющим определенный спектр возбужденных состояний, то подход в рамках теории возмущений оказывается более общим, так как он позволяет учитывать вклад в амплитуду рассеяния не только основного состояния (кулоновские статические поправки), но и возбужденных состояний ядра (дисперсионные поправки) [2, 3]. По сравнению с фазовым анализом этот подход обладает также преимуществом более наглядной зависимости от ядерных параметров.

Впервые корректная поправка второго борновского приближения к амплитуде упругого рассеяния электронов на точечном кулоновском центре была получена методами теории возмущений в [4]. Действительная часть указанной поправки определяет соответствующую добавку $d\sigma_{M-F}$ к дифференциальному сечению рассеяния, известную как сечение Мак-Кинли и Фешбаха [5], которые получили его из точного решения уравнения Дирака в поле кулоновского центра. Мнимая часть этой поправки логарифмически расходится при стремлении регуляризирующей массы фотона (параметра экранирования) к нулю, что обусловлено дальнодействием кулоновского поля. В [4] на примере рассеяния скалярной частицы во втором и третьем борновских приближениях было показано, что подобного рода расходимости должны возникать в каждом порядке теории возмущений, но в конечном итоге они факторизуются в фазовый множитель точной амплитуды, и сечение рассеяния оказывается конечным.

В настоящей работе, являющейся развитием [6], получено выражение для статической кулоновской поправки $\delta M^{(c)}$ порядка $Z\alpha$ к амплитуде $M^{(1)}$ первого борновского приближения с учетом форм-фактора распределения заряда бесспинового ядра. Расчеты проведены для форм-факторов гауссового и оболочечного типов, удовлетворительно описывающих структуру легких ядер [7]. Показано, что содержащиеся в $\delta M^{(c)}$ логарифмически расходящиеся члены в рассмотренном приближении могут быть выделены в фазовый множитель точной амплитуды. При этом поправка к сечению остается конечной, хотя она и зависит от способа выделения расходящейся фазы. Наряду с точными выражениями приведены более простые приближенные формулы для поправки к сечению, справедливые до энергий электронов порядка 50 МэВ. Результаты расчета иллюстрируются графически.

1. Предполагая, что энергия рассеивающихся электронов достаточно велика, а углы рассеяния не слишком близки к 0 и 180°, т. е. E^2, P^2, $q^2 \gg m^2$, где $\mathbf{P}=\mathbf{p}+\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}=\mathbf{p}'-\mathbf{p}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — импульсы электрона до и после рассеяния, мы можем во всех расчетах пренебречь массой электрона m. Тогда выражение для амплитуды упругого рассеяния электрона покоящимся бесспиновым ядром с точностью до членов $\sim (Z\alpha)^2$ представимо в виде

$$M = M^{(1)} + \delta M^{(c)} = \left(\frac{4\pi Z\alpha}{q^2}\right) \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^0 \left[F(q^2) - \left(\frac{Z\alpha}{\pi^2}\right) G(E, q^2)\right] u(\mathbf{p}). \tag{1}$$

Здесь $F(q^2)$ — зарядовый форм-фактор ядра,

$$G(E, q^2) = \frac{Eq^2}{2P^2} \int \frac{d^3f}{E^2 - f^2 + i0} \frac{F(q_1^2)\, F(q_2^2)}{(q_1^2+\delta^2)(q_2^2+\delta^2)} [P^2 + 2(\mathbf{Pf})], \tag{2}$$

причем

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{f} - \mathbf{p}, \ \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}' - \mathbf{f}, \ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q},$$

а δ — масса фотона, регуляризирующая интеграл (2).

Из (1) для дифференциального сечения найдем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} |M|^2 = \left(\frac{Z\alpha}{q^2}\right)^2 P^2 \left| F(q^2) - \left(\frac{Z\alpha}{\pi^2}\right) G(E, q^2)\right|^2. \tag{3}$$

В дальнейшем мы воспользуемся стандартной моделью оболочек с потенциалом гармонического осциллятора, которая достаточно проста и эффективно работает в случае легких ядер с $4 \leqslant A \leqslant 16$. В этой модели зарядовый форм-фактор ядер 1р-оболочки имеет вид

$$F(q^2) = (1 - q^2/a_1^2) \exp(-q^2/2a_2^2), \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{a_1^2}=\frac{Z-2}{6Z}a^2,\quad \frac{1}{a_2^2}=\frac{A-1}{2A}a^2+\frac{1}{3}\langle r_p^2\rangle,$$

$$\frac{1}{a_2^2}+\frac{2}{a_1^2}=\frac{1}{3}\langle r^2\rangle,$$

a — осцилляторный параметр, $\langle r^2\rangle$ и $\langle r_p^2\rangle$ — среднеквадратичные радиусы ядра и протона.

Как видно, форм-факторы такого типа приводят к появлению в сечении первого борновского приближения дифракционного минимума $F(q^2)=0$ при $q^2=a_1^2$.

Подстановка (4) в (2) дает

$$G(E,q^2)=\frac{Eq^2}{P^2}\left(I_{22}-\frac{2}{a_1^2}I_{02}+\frac{1}{a_1^4}I_{00}\right). \tag{5}$$

Здесь

$$I_{mn}=\frac{1}{2}\int\frac{d^3f}{E^2-f^2+i0}\,\frac{P^2+2(\mathbf{Pf})}{(q_1^2+\delta^2)^{m/2}(q_2^2+\delta^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{q_1^2+q_2^2}{2a_2^2}\right). \tag{6}$$

Способ вычисления подобных интегралов, а также точные и приближенные выражения для них при m, $n=0$, 2 приведены в Приложении.

Заметим, что рассматриваемый нами форм-фактор (4) в плоскости комплексного q^2 является целой функцией порядка роста $\rho=1$ и типа $\sigma=1/2a_2^2$. Согласно формулам (21) и (22) Приложения порядок роста функции $G(E,q^2)$, определяющей поправку к форм-фактору $F(q^2)$ в борновской амплитуде, тот же $\rho'=1$, тогда как тип ее $\sigma'=\sigma/2$. Последнее приводит к тому, что вдоль положительной действительной оси q^2 относительная поправка $R=G(E,q^2)/F(q^2)$ экспоненциально растет (см. также [8]). Подобный быстрый рост радиационных поправок является по-видимому общей чертой некоторых полевых теорий с нелокальным взаимодействием [9]. Этот результат находит подтверждение и в свойствах разложения в ряд решения квазипотенциального уравнения при выборе гауссового квазипотенциала [10].

Как видно из (23)—(26), интегралы I_{02} и I_{22} должны иметь логарифмические особенности по регуляризационному параметру δ. Представим

$$I_{02}=I_{02}^{\text{рег}}+I_{02}^{\text{нерег}},\quad I_{22}=I_{22}^{\text{рег}}+I_{22}^{\text{нерег}}. \tag{7}$$

Тогда из точных формул Приложения для нерегулярных частей (7) найдем следующие выражения:

$$I_{02}^{\text{нерег}}=i\pi^2\frac{P^2}{E}\ln\left(\frac{q}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{q^2}{2a_2^2}\right), \tag{8}$$

$$I_{22}^{\text{нерег}}=2i\pi^2\frac{P^2}{Eq^2}\ln\left(\frac{q}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{q^2}{2a_2^2}\right). \tag{9}$$

Отсюда для нерегулярной части

$$G(E,q^2)=G^{\text{рег}}(E,q^2)+G^{\text{нерег}}(E,q^2) \tag{10}$$

будем иметь

$$G^{\text{нерег}}(E, q^2) = 2i\pi^2 \ln\left(\frac{q}{\delta}\right) F(q^2). \tag{11}$$

Таким образом, амплитуда (1) принимает вид

$$M = \left(\frac{4\pi Z\alpha}{q^2}\right) \bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^0 \left\{F(q^2)\left[1 - iZ\alpha \ln\left(\frac{q^2}{\delta^2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{Z\alpha}{\pi^2}\right) G^{\text{рег}}(E, q^2)\right\} u(\mathbf{p}). \tag{12}$$

С точностью до $Z\alpha$ это выражение совпадает с

$$M = e^{-iZ\alpha \ln\left(\frac{q^2}{\delta^2}\right)} M^{\text{рег}}. \tag{13}$$

Причем регулярная часть амплитуды в рассматриваемом приближении имеет вид

$$M^{\text{рег}} = \left(\frac{4\pi Z\alpha}{q^2}\right) \bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^0 \left[F(q^2) - \left(\frac{Z\alpha}{\pi^2}\right) G^{\text{рег}}(E, q^2)\right] u(\mathbf{p}). \tag{14}$$

Этим результатом и следует пользоваться при оценке вклада двухфотонного обмена в сечение рассеяния (3).

2. В общем случае для $G^{\text{рег}}(E, q^2)$ аналитические квадратуры невозможны, поэтому мы рассмотрим здесь случай относительно невысоких энергией: $E/a_2 \ll 1$. В низшем приближении I_{00} оказывается чисто действительным и расходящимся при $a_2 \to \infty$ (переход к точечному ядру). При учете следующих поправок найдем

$$I_{00} = I_{00}^{\text{рег}} \simeq 2\pi\sqrt{\pi}\, a_2^3 \left(1 - \frac{2}{3}\frac{P^2}{a_2^2} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2}\frac{EP^2}{a_2^3}\right) \exp\left(-\frac{q^2}{4a_2^2}\right). \tag{15}$$

Интеграл $I_{02}^{\text{рег}}$ в случае точечного ядра оказывается конечным и в низшем приближении по E/a_2 равен

$$I_{02}^{\text{рег}} \simeq -\frac{\pi^2}{2E} P^2 \left[\pi + i\left(1 + \ln\frac{q^2}{4E^2}\right)\right] \exp\left(-\frac{q^2}{2a_2^2}\right). \tag{16}$$

Аналогично для $I_{22}^{\text{рег}}$ получим

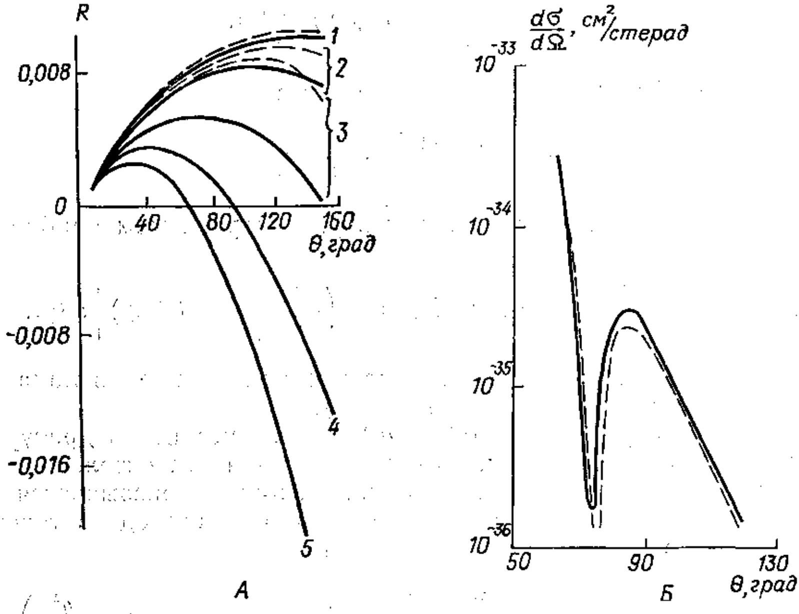
$$I_{22}^{\text{рег}} \simeq \frac{\pi^2}{2E}\left[-\pi\frac{2E-q}{q} + i\ln\left(\frac{q^2}{4E^2}\right)\right] \exp\left(-\frac{q^2}{2a_2^2}\right). \tag{17}$$

В пределе точечного ядра действительная часть (17) совпадает с результатом, полученным в [4].

На рис. *А* приведены зависимости относительной поправки

$$R = -\left(\frac{Z\alpha}{\pi^2}\right) 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{G^{\text{рег}}(E, q^2)}{F(q^2)}\right] \tag{18}$$

к сечению первого борновского приближения при различных энергиях падающих электронов в случае ядра-мишени C^{12} ($a_1 = 1{,}82$ фм$^{-1}$, $a_2 = 0{,}83$ фм$^{-1}$). Сплошные кривые получены на основании точных формул для интегралов I_{mn} из (21), (23)—(26), пунктирные — на основании приближенных формул (15)—(17). Как видно из рисунка, в рассматриваемой области энергий $E \leqslant 100$ МэВ относительная поправка R не превышает 2% и максимальна по величине при больших углах рассеяния $\theta \geqslant 120°$. Как отмечалось выше, с ростом энергии E поправка R быстро растет по величине: при $E \geqslant 400$ МэВ в области больших углов $\theta \geqslant 150°$ она начинает превышать вклад первого борновского приближения, что делает необходимым учет в амплитуде рассеяния членов $\sim (Z\alpha)^3$ и выше.



А: Угловые зависимости относительной поправки R порядка $Z\alpha$ к сечению первого борновского приближения при энергиях падающих электронов E: *1* — 10, *2* — 25, *3* — 50, *4* — 75, *5* — 100 МэВ в случае ядра C^{12}. Пунктиром показаны соответствующие приближенные зависимости (15)—(17); *Б*: Угловые зависимости дифференциального сечения упругого рассеяния электронов на ядре C^{12} при $E=250$ МэВ во втором (сплошная кривая) и в первом (пунктирная кривая) борновском приближении

На рис. *Б* приведены угловые зависимости сечения упругого рассеяния электронов с энергией $E=250$ МэВ на ядре C^{12}. Сплошная кривая получена численно на ЭВМ по точным формулам для I_{mn} и учитывает вклад в сечение наряду с интерференционным членом $\sim (Z\alpha)^3$ также и члена $|\delta M^{(c)}|^2 \sim (Z\alpha)^4$, который дает главный вклад в области дифракционного минимума $F(q^2)=0$. Пунктиром показано соответствующее сечение в первом борновском приближении. Как видно, учет поправки $\delta M^{(c)}$ приводит к некоторому смещению положения дифракционного минимума в сторону малых углов рассеяния и к заполнению его, которое быстро увеличивается с ростом энергии падающих электронов.

Приложение. Благодаря присутствию быстро убывающей гауссовой экспоненты, регуляризованные интегралы (6) хорошо сходятся на действительной оси f. В то же время неограниченный рост подынтегральной функции вдоль мнимой оси плоскости комплексного f создает некоторые трудности при их вычислении. Предлагаемый нами способ вычисления этих интегралов[1] основан на использовании определенным образом подобранного спектрального разложения. Для примера вычислим подробно простейший из интегралов (6) при $m=n=0$:

$$I_{00}=I_{00}^{(1)}+I_{00}^{(2)}=\frac{1}{2}\int\frac{d^3f}{E^2-f^2+i0}\,[P^2+2\,(\mathbf{Pf})]\exp\left(-\frac{q_1^2+q_2^2}{2a_2^2}\right). \qquad (19)$$

Раскрыв $q_1^2+q_2^2=2E^2+2f^2-2\,(\mathbf{Pf})$ и выполнив интегрирование по углам в $I_{00}^{(1)}$, получим

$$I_{00}^{(1)}=-\frac{\pi}{2}a_2^3\rho^2e^{-k^2/4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\,dt}{t^2-\varepsilon^2-i0}\left(e^{-t_-^2}-e^{-t_+^2}\right), \qquad (20)$$

где введены безразмерные величины

$$t_\pm=\frac{1}{2}\rho\pm t,\quad k=\frac{q}{a_2},\quad \rho=\frac{P}{a_2},\quad \varepsilon=\frac{E}{a_2}.$$

Применение в (20) преобразования

$$e^{-t_\pm^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2-2iut_\pm}\,du$$

с последующим изменением порядка интегрирования позволяет замкнуть контур интегрирования по t в зависимости от знака u либо в верхней, либо в нижней полуплоскостях и применить теорему о вычетах. Остающийся интеграл по u является табличным. Выполнив аналогичные вычисления для $I_{00}^{(2)}$, содержащего дополнительную угловую корреляцию $(\mathbf{Pf})$, найдем окончательно

$$I_{00}=\frac{2\pi\sqrt{\pi}\,a_2^3}{\rho}\,e^{-k^2/4}\,[(1-\rho x_-)\,\Phi(x_+)+(1-\rho x_+)\,\Phi(x_-)]. \qquad (21)$$

Здесь $x_\pm=\frac{1}{2}\rho\pm\varepsilon$, а используемые также и ниже функции Φ следующим образом связаны с вырожденной гипергеометрической функцией ${}_1F_1$:

$$\Phi(v_\pm)=v_\pm\,{}_1F_1\left(1;\ \frac{3}{2};\ -v_\pm^2\right)\mp\frac{i\sqrt{\pi}}{2}e^{-v_\pm^2}. \qquad (22)$$

С помощью известного метода Фейнмана параметризации подынтегрального выражения, содержащего в знаменателе произведение квадратичных полиномов (см., например, [13]), вычисление интегралов I_{02} и I_{22} может быть сведено к рассмотренной задаче вычисления I_{00}, но уже с кратными полюсами. В результате для I_{02} получим выражение

$$I_{02}=-2\pi\sqrt{\pi}\,a_2\rho^2e^{-k^2/4}\int\limits_0^1\frac{dt}{cs^3}\{-tcs+[tc-sy_+\,(s-ty_+)]\Phi(y_+)+$$
$$+[tc+sy_-\,(s-ty_-)]\Phi(y_-)\}, \qquad (23)$$

---

[1] Следует отметить, что использованное в [11, 12] преобразование Лапласа в рассматриваемом случае оболоченных форм-факторов из-за отсутствия обратного преобразования неприменимо. Преобразование Лапласа может быть эффективно лишь для функций, растущих не быстрее линейной экспоненты.

в котором

$$y_{\pm}=\frac{1}{2}s\pm c,\quad s=[t^2\rho^2+(1-t)^2k^2]^{1/2},$$

$$c=[t^2\varepsilon^2-(1-t)\Delta^2-i0]^{1/2},\quad \Delta=\frac{\delta}{a_2}.$$

Для I_{22} будем иметь

$$I_{22}=\frac{8\pi\sqrt{\pi}\,\rho^2}{a_2}e^{-k^2/4}\int\limits_0^{1/2}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2\,J_{22}(t_1,\ t_2),\tag{24}$$

где

$$J_{22}(t_1,\ t_2)=(1+2t_1)J_{22}^{(1)}+(1-2t_1)J_{22}^{(2)},$$

$$J_{22}^{(1)}=\frac{1}{8rb^3}[2rb+(r-4bz_-^2)\Phi(z_-)-(r+4bz_+^2)\Phi(z_+)],\tag{25}$$

$$J_{22}^{(2)}=\frac{1}{r^3b}[-rb+(b-rz_-^2)\Phi(z_-)+(b+rz_+^2)\Phi(z_+)].\tag{26}$$

Здесь

$$z_{\pm}=\frac{1}{2}r\pm b,\quad r=[(1-2t_1)^2\rho^2+4t_2^2k^2]^{1/2},$$

$$b=[t_1^2\rho^2+t_2^2k^2+(1-4t_1)\varepsilon^2-2t_1\Delta^2-i0]^{1/2}.$$

Бесконечно малая мнимая добавка в выражениях для b и c должным образом задает правило обхода точек ветвления.

В заключение остановимся на выделении из интегралов (23) и (24) нефизических, расходящихся при $\delta\to 0$ членов.

После некоторых алгебраических преобразований из подынтегрального выражения (23) можно выделить часть, содержащую особенность в знаменателе:

$$I'_{02}=-i\pi^2a_2\rho^2e^{-k^2/4}\int\limits_0^1 dt\,\frac{2-t}{2c}\,\mathrm{ch}\,(sc)\,e^{-c^2-s^2/4}.\tag{27}$$

Принимая во внимание, что

$$(2-t)\,e^{-c^2-s^2/4}\,\mathrm{ch}\,(sc)\,\big|_{c=0}=2e^{-k^2/4}+0\,(\Delta),$$

истинно сингулярную часть (27) запишем в виде

$$I''_{02}=-i\pi^2a_2\rho^2e^{-k^2/4}\int\limits_0^1\frac{dt}{c}.\tag{28}$$

Вычислив этот интеграл и воспользовавшись тем, что [2]

$$\ln\left(\frac{\delta}{2E}\right)=\ln\left(\frac{\delta}{q}\right)+\ln\left(\frac{q}{2E}\right),$$

придем к формуле (8) для $I_{02}^{\text{нерег}}$.

---

[2] Присущая второму борновскому приближению неоднозначность в выборе логарифмически расходящейся фазы устраняется самосогласованным образом при учете высших порядков.

Совершенно аналогично сингулярная часть интеграла (24) может быть записана в виде

$$I''_{22} = \frac{2i\,\pi^2}{a_2'} \rho^2 e^{-k^2/4} \int_0^{1/2} dt_1\, e^{-r_*^2/4} \int_0^{t_1} dt_2 \times$$

$$\times \frac{1}{b} \left[(1-2t_1) - \frac{1}{4}(1+2t_1)(6-r_*^2) - \frac{1}{2b^2}(1+2t_1) \right], \qquad (29)$$

где $r_*^2 = r^2\big|_{b=0} = k^2(4t_1 - 1)$. Выполнив в (29) интегрирование и выбрав должным образом расходящийся логарифм, придем к формуле (9) для $I_{22}^{\text{нерег}}$. Одновременно, отбрасывая члены порядка E/a_2 и выше, получим также формулу (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kline F. J. et al. «Nucl. Phys.», 1973, A209, 381.
2. Bottino A., Ciocchetti G., Molinari A. «Nucl. Phys.», 1966, 89, 192; Friar J. L., Rosen M. «Phys. Lett.», 1972, 39B, 615; «Ann. Phys.», 1974, 87, 289; Bisiacchi G., Furlan G. «Phys. Lett.», 1963, 3, 186.
3. Бойцов В. Н., Кондратюк Л. А., Копелиович В. Б. «Ядерная физика», 1972, 16, 515; Gunion J., Stodolsky L. «Phys. Rev. Lett.», 1973, 30, 345.
4. Dalitz R. H. «Proc. Roy. Soc.», 1951, A206, 509.
5. Mc Kinley W. A., Feshbach H. «Phys. Rev.», 1948, 74, 1759.
6. Керимов Б. К., Аль Хамис И. М., Сафин М. Я. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1978, 42, 191.
7. Гулькаров И. С. Исследование ядер электронами. М., 1977.
8. Lewis R. R. «Phys. Rev.», 1956, 102, 537.
9. Ефимов Г. Е. ЭЧАЯ, 1974, 5, вып. 1.
10. Гарсеванишвили В. Р., Матвеев В. А., Слепченко Л. А. ЭЧАЯ, 1970, 1, вып. 1.
11. Budini P., Furlan G. «Nuovo Cim.», 1959, 13, 790.
12. Горшков В. Г. ЖЭТФ, 1961, 41, 977; 1962, 43, 1714.
13. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 2. М., 1971.

Поступила в редакцию
23.9 1977 г.
Кафедра
теоретической физики