

УДК 530.12

В. Н. Пономарев
Е. В. Сметанин

**НОВЫЙ ВАРИАНТ НЕЛИНЕЙНОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ (II)**

Получены динамические (волновые и солитонные) решения уравнений нелинейной электродинамики, нелинейность которой обусловлена кручением пространства-времени.

В первой части настоящей работы [1] были выведены уравнения нелинейного электромагнитного поля (6), нелинейность которого появилась за счет спин-спинового взаимодействия, индуцированного кручением пространства-времени, а также исследовались полученные электростатические решения этих уравнений как в пространстве Минковского, так и с учетом пространственно-временной кривизны.

В этой части мы рассмотрим динамические решения уравнения (6) [1]¹

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = \frac{4\pi}{c} J^\beta,$$

где

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{2bA_{[\mu} \tilde{F}_{\nu]} A^\nu}{1 + bA^2}; \quad J^\beta = -\frac{bc}{4\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\gamma} A^\gamma.$$

§ 3. Волновое решение. Вначале рассмотрим некоторое частное волновое решение, когда 4-потенциал задан в виде $A_\mu = (0, A(x^0, y), 0, 0)$, что соответствует плоскополяризованной волне, распространяющейся вдоль оси oy . В этом случае система уравнений (6) [1] сводится к одному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \frac{b}{1 - bA^2} A \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] = 0.$$

В новых переменных $\xi = x^0 + y$, $\eta = x^0 - y$ это уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{b}{1 - bA^2} A \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$A = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \sin [f_1(\xi) + f_2(\eta)] & A^2 < \frac{1}{b}, \end{cases} \tag{2a}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{ch} [\psi_1(\xi) + \psi_2(\eta)] \quad A^2 > \frac{1}{b}. \right. \tag{2б}$$

Здесь $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$, $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\eta)$ — произвольные функции.

¹ Все обозначения введены в [1]; уравнения рассматриваются в пространстве Минковского.

Рассмотрим взаимодействие полученных плоских волн исходя из решения (2а) ². Запишем это решение в более удобной форме

$$A = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\varphi_1(\xi) \sqrt{1 - \varphi_2^2(\eta)} + \varphi_2(\eta) \sqrt{1 - \varphi_1^2(\xi)} \right), \quad (3)$$

где $\varphi_{1,2} = \sin f_{1,2}$ и $|\varphi_{1,2}| < 1$.

Предположим [2, 3], что при $t \rightarrow -\infty$ наше решение представимо в виде суперпозиции двух волн. Легко видеть, что полученное решение удовлетворяет такому начальному условию, если выбрать плоские волны, сосредоточенные в ограниченной пространственно-временной области. Двигаясь навстречу друг другу, эти волны перекроются и будут взаимодействовать, при этом их форма будет деформирована. Чтобы получить результат взаимодействия, достаточно рассмотреть решение (3) при $t \rightarrow +\infty$. Оказывается, что решение (3) вновь переходит в суперпозицию недеформированных волн. Таким образом, взаимодействие не приводит окончательно к каким-либо изменениям рассеянных волн.

В заключение отметим, что для одной плоской волны все компоненты введенного нами тока J^β равны нулю, т. е. электромагнитная волна не будет переносить заряда. Компоненты тока будут отличны от нуля только в области взаимодействия. Это можно увидеть, выписав явный вид не равных нулю компонентов тока для решения (2а)

$$J_1 = \frac{c}{\pi \sqrt{b}} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \frac{\sin(f_1 + f_2)}{\cos^2(f_1 + f_2)}.$$

§ 4. Солитонные решения. В последнее время широкую известность получили исследования специальных решений нелинейных уравнений, соответствующих движущимся частицеподобным объектам — солитонам [4]. В связи с этим представляет интерес получение подобных нестационарных решений уравнения (6). Решение системы уравнений (6) [1] ищем в виде

$$A_\mu = (A_0(x^0, x, \rho), A_1(x^0, x, \rho), 0, 0),$$

где

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Полагая равными нулю компоненты тока J_y и J_z

$$J_y = J_z = -\frac{b\tilde{F}_{10}}{(1 + bA^2)} \left(\frac{\partial A_0}{\partial \rho} A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \rho} A_0 \right),$$

что достигается обращением в нуль выражения $\frac{\partial A_0}{\partial \rho} A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \rho} A_0$, получим

$$A_1(x^0, x, \rho) = f(x^0, x) A_0(x^0, x, \rho).$$

Если к тому же предположить $f(x^0, x) = -\beta = \text{const}$ (что эквивалентно, как окажется ниже, рассмотрению одночастичных солитонных решений), то из системы (6) [1] будет следовать $A_0(x^0, x, \rho) = A_0(x - \beta x^0, \rho)$. Заметим, что константа β характеризует скорость распространения объекта, описываемого A_0 . В силу сделанных предположений система уравнений (6) [1] сведется к одному уравнению в переменных $\xi = x - \beta x^0, \rho$

² Заметим, что уединенная плоская электромагнитная волна не взаимодействует с собственным полем кручения.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tilde{F}_{10}}{1 + bA^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_0}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial A_0}{\partial \rho} \right) = - \frac{bA_0}{(1 + bA^2)^2} \left\{ \tilde{F}_{10}^2 + \left(\frac{\partial A_0}{\partial \rho} \right)^2 (1 - \beta^2) \right\}, \quad (4)$$

где $\tilde{F}_{10} = (1 - \beta^2) \partial_{\xi} A_0$; $A^2 = (1 - \beta^2) A_0^2$.

Пусть $|\beta| < 1$ ($\beta \neq 0$). Тогда, сделав замену переменной $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{u}{1 + u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 \right]$$

здесь $u = \sqrt{b} \sqrt{1 - \beta^2} A_0$.

Это нелинейное относительно u уравнение сводится к линейному уравнению относительно новой функции $\varphi = \text{arcsinh } u$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0.$$

Окончательно имеем

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{b} \sqrt{1 - \beta^2}} \text{sh } \varphi(x - \beta x^0, \rho); \quad A_1 = -\beta A_0,$$

$$\varphi(x - \beta x^0, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda, x - \beta x^0, \rho) d\lambda,$$

где

$$\varphi(\lambda, \eta, \rho) = \begin{cases} A_1(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda}\eta} I_0(\sqrt{\lambda}\rho) + B_1(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda}\eta} K_0(\sqrt{\lambda}\rho) + C_1(\lambda) e^{-i\sqrt{\lambda}\eta} I_0(\sqrt{\lambda}\rho) + D_1(\lambda) e^{-i\sqrt{\lambda}\eta} K_0(\sqrt{\lambda}\rho) & \lambda > 0 \\ (A_3\eta + B_3) \ln \frac{\rho}{\rho_0} & \lambda = 0 \\ A_2(\lambda) e^{\sqrt{-\lambda}\eta} J_0(\sqrt{-\lambda}\rho) + B_2(\lambda) e^{\sqrt{-\lambda}\eta} N_0(\sqrt{-\lambda}\rho) + C_2(\lambda) e^{-\sqrt{-\lambda}\eta} J_0(\sqrt{-\lambda}\rho) + D_2(\lambda) e^{-\sqrt{-\lambda}\eta} N_0(\sqrt{-\lambda}\rho) & \lambda < 0 \end{cases}$$

$A_{1,2}(\lambda), B_{1,2}(\lambda), C_{1,2}(\lambda), D_{1,2}(\lambda)$ — произвольная функция λ ; A_3, B_3 и ρ_0 — константы интегрирования; $J_0(z), I_0(z), K_0(z), N_0(z)$ — цилиндрические функции; λ — непрерывный параметр.

Исследуем частное решение уравнения (4), которое также может быть получено из статического решения (11) работы [1] с помощью преобразований Лоренца

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{b} \sqrt{1 - \beta^2}} \text{sh} \frac{\sqrt{b} q}{\sqrt{\left(\frac{x - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + \rho^2}}; \quad A_1 = -\beta A_0. \quad (5)$$

Соответствующие решению (5) напряженности электрического и магнитного полей E и H описывают солитон

$$E_x = F_{01} = \frac{q}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{\text{ch } \varphi} \frac{x - \beta x^0}{r_1^3}, \quad H_x = F_{23} = 0;$$

$$E_y = F_{02} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \frac{y}{r_1^3}, \quad H_y = F_{31} = \beta E_z;$$

$$E_z = F_{03} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \frac{z}{r_1^3}, \quad H_r = F_{12} = -\beta E_y;$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \frac{((x-\beta x^0)^2 + \rho^2)^{1/2}}{r_1^3},$$

$$|\mathbf{H}| = \frac{q\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\rho}{\operatorname{ch} \varphi r_1^3}, \quad (\mathbf{E}\mathbf{H}) = 0, \quad J_1 = -\beta c\rho^*; \quad J_2 = J_3 = 0;$$

$$\rho^* = \frac{\sqrt{b} q^2}{4\pi} \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\sqrt{1-\beta^2} \operatorname{ch}^2 \varphi r_1^4}.$$

Здесь $\varphi = \frac{\sqrt{b} q}{r_1}$, $r_1 = \sqrt{\left(\frac{x-\beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + \rho^2}$, $q = \int \rho^* dv$ — заряд солитона.

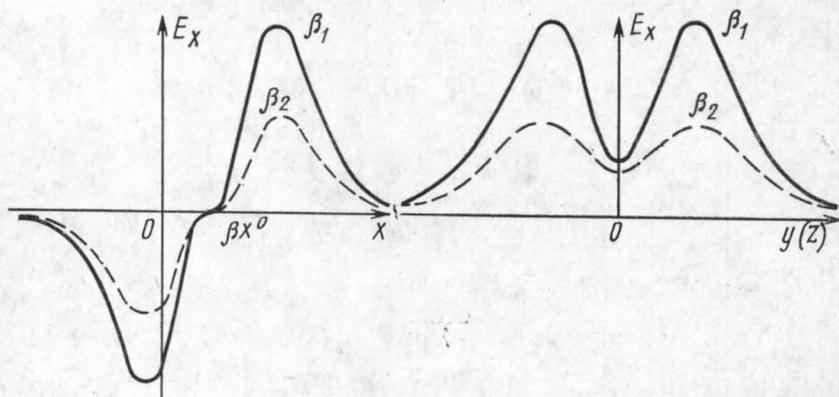


Рис. 1.

Рис. 2.

Качественное поведение зависимости напряженности электрического поля от координат и скорости представлено на рисунках 1—4.

Мы видим, что в центре солитона $x = \beta x_0$, $y = z = 0$ электромагнитное поле равно нулю. Отметим интересную зависимость напряженностей электрического и магнитного полей от скорости при $\beta \rightarrow 1$

$$E_{\parallel} = E_x \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} E_{\perp} = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \rightarrow 0 & x \neq \beta x^0 \\ E_{\perp} \rightarrow \infty & x = \beta x^0. \end{cases}$$

Энергия солитона, определенная через симметричный или канонический тензор энергии-импульса (12) [1], оказывается, как и раньше,

расходящейся из-за члена самодействия. Однако в теории есть сохраняющаяся со временем конечная величина, которую можно назвать массой солитона. А именно, рассмотрим тензор $t^{\alpha\beta}$, удовлетворяющий закону сохранения $t^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, что легко видеть, если представить $t^{\alpha\beta}$, используя (6) [1], в виде

$$t^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} (F^{\nu\beta} A^\alpha)_{;\nu}.$$

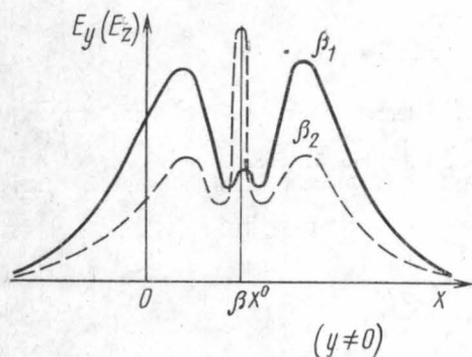


Рис. 3

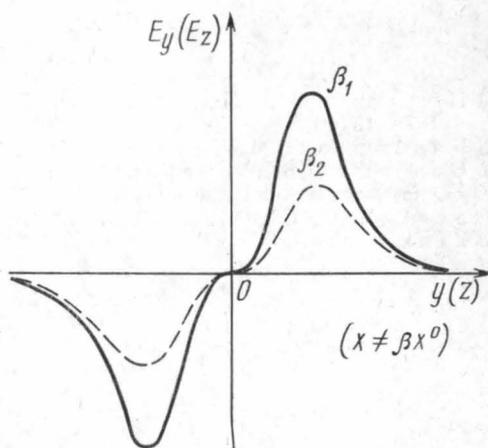


Рис. 4

Определим энергию и импульс солитона через тензор $t^{\alpha\beta}$, являющийся разностью симметричного и канонического тензоров энергии-импульса. Для статического решения (11) [1] получим

$$m_0 = \frac{W_0}{c^2} = \frac{|q|}{\sqrt{b} c^2} = \frac{|q|}{\sqrt{k}}.$$

В случае движущегося солитона (5)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad P_i = \left\{ \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0 \right\}.$$

Таким образом, автоматически получается правильная релятивистская связь между электромагнитной энергией движущейся и покоящейся заряженных частиц и отсутствует «парадокс» классического электрона [5].

Таким образом, в настоящей работе построен новый вариант нелинейной электродинамики. Характерной ее особенностью является учет воздействия спина электромагнитного поля на пространственно-временной континуум, обратное влияние которого приводит к появлению нелинейных членов в уравнениях теории, нарушающих их калибровочную инвариантность, что интерпретируется как появление собственных источников электромагнитного поля.

В работе получен ряд точных электростатических частицеподобных решений с несингулярными во всем пространстве функциями поля, имеющими кулоновскую асимптотику на бесконечности. При этом энергия нелинейного электромагнитного поля оказывается конечной для достаточно широкого спектра затравочных масс.

Показано, что поле Прока волнового типа описывается уравнением $\text{Sin} - \text{Гордона}$.

Важным является то, что в рамках предложенной теории удается построить точные трехмерные решения, описывающие уединенные волны — солитоны.

Детальный анализ полученных солитонных решений на устойчивость, а также изучение квантовых эффектов теории являются предметом дальнейших исследований авторов.

Выражаем глубокую признательность Н. Н. Колесникову, В. Р. Халилову и участникам семинара, руководимого проф. Д. Д. Иваненко, за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев В. Н., Сметанин Е. В. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном.», 1978, 19, № 5.
2. Барбашов Б. М., Черников Н. А. ЖЭТФ, 1966, 51, 658.
3. Барбашов Б. М., Черников Н. А. В сб.: «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц». Киев, 1967, с. 733.
4. Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W. «Proc. IEEE», 1973, 61, 1443.
5. Zink J. W. «Amer. J. Phys.», 1966, 34, 211; 1971, 39, 1403.

Поступила в редакцию
17.6 1977 г.
Кафедра
теоретической физики