УДК 539.120.1

А. М. Ахметели
А. С. Шумовский

ОБ ОЦЕНКЕ БЛИЗОСТИ СВОБОДНЫХ ЭНЕРГИЙ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ В ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА

В последнее время значительное внимание уделяется изучению моделей магнетиков, в которых взаимодействие между спинами носит характер дальнодействия, одинакового для любой пары спинов независимо от их взаимного расположения (см., например, [1, 2] и приведенные здесь ссылки). Такой интерес объясняется прежде всего тем, что указанные модели допускают точное в термодинамическом пределе решение, а получаемые результаты оказываются полезными для обоснования приближений, используемых при исследовании более «реалистических» моделей магнетиков [3, 4]. Как указывалось в работах [5—8], присутствие дальнодействия в системе ферромагнитного типа оказывается термодинамически эквивалентным включению молекулярного поля. В частности, для модели изинговского типа с дальнодействием [7]

$$H_N = -\mu h \sum_i \sigma_i - \frac{J}{2N} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \tag{1}$$

(где h — внешнее магнитное поле, $J=\mathrm{const}>0$, N — число узлов в кристаллической решетке, σ_i — z-компонент оператора спина $1/2$ в i-том узле) на основе общего метода исследования модельных гамильтонианов [9] удалось получить оценку [7]

$$0 \leqslant f^{(\text{мп})} - f_N \leqslant \varepsilon_N(\theta,\ h), \tag{2}$$

где f_N — плотность свободной энергии в модельной системе (1) и $f^{(\text{мп})}$ — плотность свободной энергии в аппроксимирующей системе с молекулярным полем:

$$H^{(\text{мп})} = -(JC + \mu h) \sum_i \sigma_i + \frac{1}{2} JNC^2, \tag{3}$$

$$C = \operatorname{th} \frac{JC + \mu h}{\theta}.$$

Входящая в оценку (2) величина $\varepsilon_N(\theta,\ h)$ обращается в нуль при температуре $\theta=0$ для всех значений N и h; $\varepsilon_N(\theta,\ h) \backsim N^{-1/2}$ в критической области и $\varepsilon_N(\theta,\ h) \backsim N^{-1}$ вне критической области. Таким образом, при переходе в критическую область в оценке (2) наблюдается смена асимптотики по N.

Возникает вопрос, является ли такая смена асимптотики свойством рассматриваемой модельной системы или связана с методом построения оценки (2)? Как показывают численные расчеты, выполненные на ЭВМ CDC-6200 в ОИЯИ, для $N=50 \div 12\,800$ разность плотностей модельной и аппроксимирующей свободных энергий является величиной порядка N^{-1} или, возможно, $\ln N/N$ на любом компактном множестве значений температуры и внешнего поля, включающем критическую точку $\theta=J$, $h=0$, что согласуется и с некоторыми другими оценками [10]. Таким образом, нарушение асимптотики по N в оценке (2) следует объяснить применением общей методики [6], основывающейся лишь на весьма слабых предположениях относительно свойств исследуемой системы.

В этой связи представляет естественный интерес установление теоретических оценок, согласующихся с расчетными как в критической области, так и вне ее. Для этой цели мы воспользуемся основным свойством модельной системы (1) — ее классичностью, и, пользуясь определением плотности свободной энергии и коммутируемостью в модели (1), запишем разность (2) в следующем виде:

$$f^{(\text{мп})} - f_N = \frac{\theta}{N} \ln \langle e^{-\widetilde{H}/\theta} \rangle_{(\text{мп})} =$$

$$= \frac{\theta}{N} \ln \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{J}{2\theta} \right)^k \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i - C \right)^{2k} \right\rangle_{(\text{мп})}, \tag{4}$$

где $\langle \ldots \rangle_{(\text{мп})}$ означает среднее с гамильтонианом (3) и

$$\widetilde{H}=H_N-H^{(\text{мп})}.$$

Используя свойство выпуклости свободной энергии, получаем оценку снизу

$$\frac{J}{2N^2}\left\langle\left(\sum_i\sigma_i-NC\right)^2\right\rangle_{(\text{мп})}\leqslant f^{(\text{мп})}-f_N.$$

Переходя к операторам Паули с помощью соотношения

$$\sum_i\sigma_i=\frac{N}{2}-\sum_i b_i^+b_i$$

и применяя теорему Вика — Блоха — де Доминициса для операторов Паули [11], находим

$$\frac{J}{2N^2}\left\langle\left(\sum_i\sigma_i-NC\right)^2\right\rangle_{(\text{мп})}=\frac{J}{2N}\,\frac{1}{1+e^{E/\theta}}\left(1-\frac{1}{1+e^{E/\theta}}\right), \tag{5}$$

где $E=JC+\mu h$. Далее, производя вычисление средних в правой части разложения (4) с помощью теоремы Вика — Блоха — де Доминициса [11], можно убедиться в том, что каждое из таких средних не превосходит единицы. Поэтому ряд, стоящий в правой части соотношения (4), можно мажорировать сходящимся рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{J}{2\theta}\right)^k.$$

С учетом соотношения (5) получаем окончательную оценку

$$\frac{J}{2N}\,\frac{1}{1+e^{E/\theta}}\left(1-\frac{1}{1+e^{E/\theta}}\right)\leqslant f^{(\text{мп})}-f_N\leqslant\frac{J}{2N}, \tag{6}$$

из которой следует, что f_N сходится к $f^{(\text{мп})}$ как N^{-1} на любом компактном множестве значений температуры и внешнего поля, содержащем критическую точку.

Действуя аналогичным образом, нетрудно установить оценку типа (6) для классической модели Стенли [12], являющейся обобщением модели (1) на случай ферромагнитного взаимодействия классических векторов спина произвольной размерности D и характеризуемой в случае дальнодействия гамильтонианом

$$H_N=-\mu\sum_i(h\sigma_i)-\frac{J}{2N}\sum_{i,j}(\sigma_i,\ \sigma_j),$$

где $\|\sigma_i\|=\sqrt{D}$. Результат не изменится также и при переходе к сферической модели Берлина — Каца, когда $\sum_i(\sigma_i)^2=N$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brout R. «Magnetism». Vol. 2A, ed. by G. T. Rado. New York, 1965.
2. Thirring W. «Many—Body Problems», Mallorca Int. School of Phys., Plenum Press, 1969.
3. Stinchcomb R. B., Horwitz G., Englert F., Brout R. «Phys. Rev.», 1963, 130, 153.
4. Юхновский И. Р., Рудавский Ю. К. ИТФ — 75 — 18Р. Киев, 1975.
5. Шумовский А. С. ИТФ — 71—56Р. Киев, 1971.
6. Бранков Й. Г., Шумовский А. С. ОИЯИ, Р4—6899. Дубна, 1973.
7. Бранков Й. Г. ОИЯИ, Р4—6998. Дубна, 1973.
8. Brankov J. G., Shumovsky A. S., Zagrebnov V. A. «Physica», 1974, 78, 183.
9. Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М., 1974.
10. Sharf G. «Phys. Lett.», 1972, 38A, 123.

11. Тябликов С. В., Москаленко В. А. ДАН СССР, 1964, **158**, 839.
12. Silver H., Frankel N. E., Ninham B. W. «J. Math. Phys.», 1972, **13**, 468.

Поступила в редакцию
30.9 1977 г.
Кафедра
квантовой статистики

УДК 539.17.01

В. К. Долинов

К ВОПРОСУ ОБ α-ЧАСТИЧНОМ МЕХАНИЗМЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ОСТАНОВИВШИХСЯ ПИОНОВ ЯДРАМИ ^{16}O

В работах [1, 2] получены экспериментальные данные по процессу поглощения остановившихся π^--мезонов различными ядрами. В частности, была измерена форма допплеровской линии γ-излучения ядра ^{12}C в состоянии 2^+ с энергией возбуждения 4,44 МэВ, образующегося при захвате пиона ядром ^{16}O. Авторы этих работ пришли к выводу о том, что рассматриваемое состояние ядра ^{12}C образуется в результате прямого одноступенчатого взаимодействия пиона с ядром ^{16}O.

В работе [1] измеренная форма допплеровской линии сравнивается с теоретической, рассчитанной в предположении, что пион поглощается α-кластером, находящимся в $1d$-состоянии в поле гармонического осциллятора, характеризующегося параметром $Q=\sqrt{\frac{1}{2}\mu\hbar\omega}$, где μ — приведенная масса α-частицы и ядра ^{12}C, $\hbar\omega$ — осцилляторный квант. Кроме того, предполагалось, что захват пиона происходит исключительно из $1s$-состояния мезоатома. Рассматривая Q в качестве подгоночного параметра, в работе [1] для него получено значение $Q=77\pm5$ МэВ/с. В то же время экспериментальные данные по рассеянию электронов на ядрах [3] дают для ^{16}O значение $Q=139$ МэВ/с.

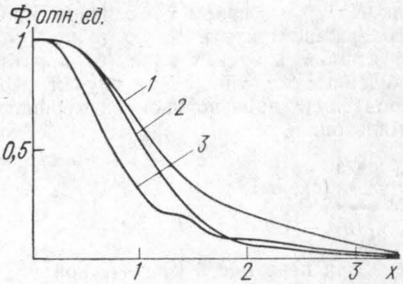

Рис. 1. Форма допплеровской линии для различных значений радиуса обрезания: 1—$R_0=0$, 2—$R_0=2$ Ф, 3—$R_0=5$ Ф

Для устранения этого противоречия мы провели расчет формы допплеровской линии для рассматриваемого случая, отказавшись от ряда упрощающих предположений, использованных в работе [1]. Перечислим отличительные особенности нашего подхода.

1. В качестве волновой функции, описывающей относительное движение α-кластера и ядра ^{12}C(2^+) в исходном ядре ^{16}O(0^+), использовалась функция осцилляторного $2d$-состояния, а не $1d$-состояния, как это было сделано в работе [1]. Выбор волновой функции соответствует тому, что в данном случае на относительное движение приходится 4 осцилляторных кванта.

2. В работах [4—7] показано, что кроме захвата из $1s$-состояния мезоатома кислорода существенный вклад дает захват пионов из $2p$-состояния. В нашем расчете мы использовали следующие значения парциальных ширин и сил поглощения:

$$\Gamma_{1s}^{abs}=7,56\ \text{кэВ},\qquad \Gamma_{2p}^{abs}=4,7\ \text{эВ},\qquad \omega_s=8,5\%,\qquad \omega_p=91,5\%.$$

3. В работе [1] пренебрегалось взаимодействием частиц с ядром в начальном и конечном состояниях. В нашем расчете учет этого взаимодействия производился в рамках метода плоских волн с обрезанием [8, 9], т. е. предполагалось, что в реакции принимают участие только те α-кластеры ядра-мишени, которые находятся вне сферы, радиус которой R_0 подбирался из условия равенства ширин на половине высоты теоретической и экспериментальной допплеровской линии. При этом параметр осцилляторного потенциала имел фиксированное значение $Q=139$ МэВ/с.