УДК 533.951

А. Н. Васильев

ТЕОРИЯ АНОМАЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА В ПЛАЗМЕННОМ ШНУРЕ СО СТЕПЕННЫМ СПАДАНИЕМ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Введение. В предлагаемой работе рассмотрена задача об аномальном скин-эффекте в плазменном цилиндре со степенной зависимостью концентрации электронов от радиуса. В предыдущих работах, посвященных аномальному скин-эффекту в плазменном шнуре [1—3], рассматривался гауссов профиль концентрации электронов, который в ряде случаев не адекватен экспериментальной ситуации при сильном скин-эффекте. В связи с этим интересно рассмотреть аналогичную задачу при значительно более медленном спадании концентрации электронов.

В статье используется цилиндрическая система координат (r, φ, z), в которой ось z совпадает с осью плазменного шнура, симметричного относительно этой оси и однородного по z.

Целью данной работы является получение электромагнитных характеристик плазмы — коэффициента отражения электромагнитной волны от шнура и погонного сопротивления плазмы. Возбуждающая волна предполагается цилиндрической, не зависящей от азимутального угла φ и может быть электрического ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) или магнитного ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) типа [4]. Эти два случая необходимо рассмотреть отдельно (см. § 2, 3). В § 1 рассмотрены некоторые общие вопросы вывода исходных уравнений. Окончательные ответы найдены для случая, когда скин-эффект сильный, то есть электромагнитная волна затухает, не дойдя до областей, в которых зависимость электронной концентрации от радиуса начинает отклоняться от степенного закона. Длина пробега предполагается много больше характерной глубины проникновения электромагнитного поля в плазму. Это позволяет решать задачу в приближении эффективной частоты соударений $\nu_{\text{эфф}}$.

§ 1. Исходные уравнения. Предположим, что распределение электронов в плазменном шнуре в отсутствие электромагнитной волны является равновесным и определяется формулой Больцмана

$$n_e(r) = n_0 \exp\left[-U_e(r)/T_e\right],$$

где $U_e(r)$ — потенциал сил, действующих на электроны, T_e — их температура. Функция $U_e(r)$ монотонно возрастает с ростом радиуса r.

В присутствии цилиндрической электромагнитной волны $e^{-i\omega t}\mathbf{E}(r)$ плазменный шнур описывается уравнениями Максвелла и кинетическим уравнением для функции распределения электронов. Амплитуда падающей волны предполагается малой, поэтому линеаризуем кинетическое уравнение. Для добавки $e^{-i\omega t}f(r, \mathbf{p})$ к равновесной функции распределения

$$f_0(r, \mathbf{p}) = (2\pi m T_e)^{-3/2} n_e(r) \exp(-p^2/2mT_e),$$

являющейся функцией только от полной энергии частицы $\varepsilon = U_e(r) + p^2/2m$, получим кинетическое уравнение, которое запишем в цилиндрической системе координат [5]:

$$\left[-i\omega + \nu_{\text{эфф}} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{p_\varphi v_\varphi}{r} - \frac{dU_e(r)}{dr}\right)\frac{\partial}{\partial p_r} - \frac{p_r v_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial p_\varphi}\right] f(r, \mathbf{p}) =$$
$$= eT_e^{-1}\,\mathbf{E}(r)\,\mathbf{v} f_0 \equiv \zeta(r, \mathbf{p}). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ — скорость электрона и его импульс, $e = -|e|$ — заряд электрона. Характеристики этого уравнения совпадают с интегралами движения частицы: импульсом вдоль оси z $p_z = \text{const}$, моментом количества движения по оси z $M = rp_\varphi = \text{const}$ и энергией поперечного движения $E = mv_r^2/2 + U_e(r) + M^2/2mr^2 = \text{const}$.

Граничные условия и метод решения этого уравнения аналогичны использованным в работе [6]. Решения уравнения (1) удобно записать, предварительно введя функции различной четности по p_r:

$$f^{(+)} = [f(p_r > 0) + f(p_r < 0)]/2, \quad f^{(-)} = i[f(p_r > 0) - f(p_r < 0)]/2,$$

и аналогично для $\zeta^{(\pm)}$, которые могут быть записаны (см. (1)) в виде

$$\zeta^{(+)} = ef_0(\varepsilon)(mT_e)^{-1}[p_z E_z(r) + ME_\varphi(r)/r], \qquad (2)$$
$$\zeta^{(-)} = ief_0(\varepsilon)\,T_e^{-1} v_r(r)\,E_r(r).$$

Здесь $v_r(r) = \sqrt{2(E - U_e(r) - M^2/2mr^2)/m}$, причем берется положительное значение квадратного корня. Введение этих двух функций необходимо из-за двузначности преобразования E, M, $p_z \to p_r$, p_φ, p_z. Радиальный ток выражается через интеграл по E, M, p_z от $f^{(-)}$, а j_φ и j_z — от $f^{(+)}$. Решение (1) имеет в этих обозначениях вид:

$$\begin{pmatrix} f^{(+)}(r) \\ f^{(-)}(r) \end{pmatrix} = \frac{i}{\sin B(r_2^*, r_1^*)} \int_{r_1^*}^{r_2^*} \frac{dr'}{v_r(r')} \hat{D}(r, r') \begin{pmatrix} \zeta^{(+)}(r') \\ \zeta^{(-)}(r') \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где матрица $\hat{D}(r, r')$ определяется следующим образом:

$$\hat{D}(r, r') = \begin{pmatrix} \cos B(r_2^*, r)\cos B(r', r_1^*) & -\cos B(r_2^*, r)\sin B(r', r_1^*) \\ \sin B(r_2^*, r)\cos B(r', r_1^*) & -\sin B(r_2^*, r)\sin B(r', r_1^*) \end{pmatrix}, \quad r > r'; \qquad (4)$$

$\hat{D}(r, r') = \hat{D}(r', r)$ при $r < r'$.

Здесь r_1^*, r_2^* — решения уравнения $v_r(r^*) = 0$ — классические точки поворота, $B(r, r') = \omega^* t(r, r')$, где $\omega^* = \omega + i\nu_{\text{эфф}}$, а $t(r, r') = \int_{r'}^{r} d\tilde{r}/v_r(\tilde{r})$ — время пролета частицы от радиуса r' до r.

Упростим теперь выражения для тока в плазме в случае предельно аномального скин-эффекта

$$\omega^* \tau(E,\ M) \ll 1, \qquad (5)$$

где $\tau(E,\ M) = t(r_2^*,\ r_1^*) = \dfrac{1}{2}\oint dr/v_r(r)$ — половина периода движения частицы по радиусу. В этом случае синусами в (4) можно пренебречь, косинусы с большой точностью равны 1, и поэтому $f^{(+)} \gg f^{(-)}$. В дальнейшем оставляем только члены, содержащие $f^{(+)}$. Отсюда следует, что j_r мал по сравнению с j_φ и j_z и соответственно E_r мало по сравнению с E_φ и E_z. В этом пределе получим

$$f^{(+)} = \frac{ief_0(\varepsilon)}{mT_e\omega^*\tau(E,\ M)} \int\limits_{r_1^*}^{r_2^*} \frac{dr'}{v_r(r')} [p_z E_z(r') + ME_\varphi(r')/r']. \qquad (6)$$

Отметим, что с точностью до малого параметра (5) $f^{(+)}$ не зависит от r, а является функцией E, M, p_z, то есть определяется не конкретным положением электрона на траектории, а всем предшествующим движением частицы по данной траектории.

Запишем, наконец, выражение для тока в плазме. Из-за нечетности первого члена в (6) по p_z, а второго по M, ток j_z зависит только от E_z, а j_φ — от E_φ:

$$j_z(r) = \frac{2ie^2}{\omega^* T_e m^2} \iiint \frac{dp_z dE dM}{rv_r(r)} \frac{p_z^2 f_0(\varepsilon)}{\tau(E,\ M)} \int\limits_{r_1^*}^{r_2^*} \frac{dr'}{v_r(r')} E_z(r'). \qquad (7)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для j_φ. Подставляя (7) в уравнения Максвелла, видим, что система уравнений в случае сильного скин-эффекта распадается на уравнения только для E_z и только для E_φ. По этой причине волны электрического и магнитного типов можно рассматривать отдельно друг от друга.

§ 2. Взаимодействие плазменного шнура с волной электрического типа ($H_z = 0$). Произведем в выражении для j_z (7) смену порядка интегрирования, перенося интегрирование по r' на первое место. Интегрирование по p_z проводится тривиально, после чего получаем следующее интегродифференциальное уравнение для $E_z(r)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} E_z(r) = \int\limits_0^\infty r'dr'\, G_z(r,\ r')\, E_z(r'), \qquad (8)$$

в котором ядро $G_z(r, r')$ можно записать в виде

$$G_z(r,\ r') = \frac{2}{\pi} \frac{\omega\omega_0^2}{rr'c^2\omega^* mT_e} \int\limits_{E_{\min}}^\infty dE \int\limits_0^{M^*} dM \frac{\exp(-E/T_e)}{\tau(E,\ M)v_r(r)v_r(r')}. \qquad (9)$$

Здесь $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0/m$, n_0 — плотность электронов в точке $U_e(r) = 0$, $E_{\min} = \max\{U_e(r),\ r \to r'\}$, $M^* = \min\{\sqrt{2mr^2(E - U_e(r))},\ r \to r'\}$.

В уравнении (8) мы пренебрегли членом, пропорциональным току смещения, что приводит к необходимости сшивать решение уравнения (8) с решением в свободном пространстве, представляющим из себя суперпозицию функций Ганкеля

$$E_z(r) \xrightarrow[r \gg a]{} E_{z0}\,[H_0^{(2)}(\omega r/c) + R_z H_0^{(1)}(\omega r/c)]. \qquad (10)$$

В этой формуле a — размер пучка, R_z — коэффициент отражения электромагнитной волны. Чтобы решение уравнения (8) переходило в (10), оно должно иметь асимптотику вида

$$E_z(r) \underset{r\to\infty}{\approx} \alpha(\ln r/a - \beta), \qquad (11)$$

где параметр β связан с коэффициентом отражения R_z (см. также [1]):

$$R_z = \frac{\beta + \ln \omega a/2c + \mathrm{C} + i\pi/2}{\beta + \ln \omega a/2c + \mathrm{C} - i\pi/2}, \quad \mathrm{C} = 0{,}577\ldots \qquad (12)$$

и погонным сопротивлением единицы длины плазменного шнура

$$\rho_z = -2\omega c^{-2}\,\mathrm{Im}\,\beta. \qquad (13)$$

Формулы (8, 9) определяют уравнения для волн в плазме при произвольной зависимости U_e от радиуса, например, квадратичной (подробно см. [1—3]). В [1] указывается, что в случае сильного скин-эффекта уравнения (8), (9) переходят в уравнения для плоского слоя плазмы [7]. Этот вывод основан на пренебрежении членом с центробежной энергией в выражении для $v_r(r)$. Однако такой вывод верен только в случае быстрого изменения концентрации электронов с расстоянием от оси. В случае же степенного спадания концентрации электронов изменение центробежной энергии и изменение $U_e(r)$ при движении электрона имеют одинаковый порядок величины, что приводит к необходимости учета всех возможных значений момента M. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать случай именно степенного спадания концентрации электронов

$$n_e(r) = n_0(r/a)^{-K}, \text{ то есть } U_e(r) = KT_e \ln(r/a).$$

При этом для заданного E максимальное значение, которое может принимать M, экспоненциально растет с ростом энергии [8]:

$$M_{\max} = a\sqrt{mT_eK}\,\exp(E/KT_e - 1/2).$$

Перейдем от переменных r и M к переменным $\mu = M/M_{\max}$,

$$x = (r/a)^2 \exp(-2E/KT_e) = \exp[-2(E - U_e(r))/KT_e].$$

В этих переменных полупериод движения запишется в виде

$$\tau(E, M) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{KT_e}}\,\sigma(\mu)\exp(E/KT_e + 1/2), \qquad (14)$$

где $\sigma(\mu) = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx(ex\ln 1/x - \mu^2)^{-1/2}$ — функция, зависящая только от безразмерного параметра μ, x_1 и x_2 — корни уравнения $ex\ln 1/x = \mu^2$. Из выражения (14) видно, что период движения зависит от E экспоненциально, или, что то же самое, линейно растет с ростом масштабов траектории. Траектории движения с одинаковым значением μ подобны, что и позволяет довести решение задачи до конца. При движении по траектории параметр x изменяется от x_1 до x_2.

Сделаем указанную замену переменных в выражении (9) и заменим интегрирование по E интегрированием по x. Тогда (9) перепишется в виде

$$G_z(r,\ r')=a^{-4}\, g(\omega)\begin{cases}(a/r)^{2+K}\cdot P_z(r/r'), & r>r',\\ (a/r')^{2+K}\cdot P_z(r'/r), & r<r',\end{cases} \tag{15}$$

где $g(\omega)=a^2\omega\omega_0^2/c^2\omega^*$,

$$P_z(\zeta)=\frac{2K}{\pi}\int_0^1 x^{K/2}\,dx\int_0^{\mu(x,\zeta)}\frac{d\mu}{\sigma(\mu)(ex\ln 1/x-\mu^2)^{1/2}(ex\zeta^{-2}\ln\zeta^2/x-\mu^2)^{1/2}},$$

$$\mu(x,\ \zeta)=\min\{\sqrt{ex\ln 1/x},\ \sqrt{ex\zeta^{-2}\ln\zeta^2x^{-1}}\}.$$

Как видно из формулы (15), ядро интегрального уравнения может быть представлено произведением степени r на функцию только от r/r', поэтому полезно применить к этому уравнению преобразование Меллина

$$F_z(q)=\int_0^\infty E_z(r)\frac{r^{q-1}\,dr}{a^q},\qquad E_z(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F_z(q)(r/a)^{-q}\,dq, \tag{16}$$

в результате чего получим функциональное уравнение для функции $F_z(q)$ (более подробно аналогичные преобразования интегродифференциальных уравнений проведены в [6, 7, 9]):

$$(q+K-2)^2 F_z(q+k-2)=g(\omega)\,S_z(q)\,F_z(q). \tag{17}$$

В этом уравнении $S_z(q)$ выражается через новую функцию двух переменных

$$\rho(\mu,\ q)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^{-q/2}\,dx}{\sqrt{ex\ln 1/x-\mu^2}} \tag{18}$$

с помощью интегрального соотношения

$$S_z(q)=\frac{K}{\pi}\int_0^1 d\mu\rho(\mu,\ q)\rho(\mu,\ 2-K-q)/\rho(\mu,\ 0). \tag{19}$$

Функция $\rho(\mu,\ q)$ существует при всех $0\leqslant\mu\leqslant 1$ в полуплоскости $\operatorname{Re} q<1$, поэтому $S_z(q)$ аналитично по крайней мере в полосе $1-K<\operatorname{Re} q<1$. Для малых $\mu^2\ll 1$ и для $|1-q|\gg 1/\ln e/\mu^2$ имеет место асимптотика

$$\rho(\mu,\ q)=[2\pi/e(-q+1)]^{1/2}\exp[-\mu^2(1-q)/2e].$$

В случае $K\gg 1$ подынтегральное выражение существенно отлично от нуля именно при этих значениях параметров μ и q, что приводит к следующему результату:

$$S_z(q) = K^{1/2}\,[(1-q)(K+q-1)]^{-1/2}, \quad |1-q| \gg 1, \quad |K+q-1| \gg 1. \quad (20)$$

Дополнительными условиями к уравнению (17) являются аналитичность решения в некоторой полосе и наличие полюса второго порядка (последнее следует из асимптотики (11)):

$$F_z(q) \approx \alpha(q^{-2} + \beta q^{-1} + \ldots), \; q \to 0.$$

Эти условия однозначно определяют решение уравнения (17).

Пусть $n = K - 2$. Тогда решение уравнения (17) можно записать в виде

$$F_z(q) = n^{-2}\,\Gamma^2(-q/n)(g(\omega)/n^2)^{q/n}\,\varphi(q/n), \quad (21)$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x+1) = S_z(nx)\,\varphi(x), \quad \varphi(0) = 1. \quad (22)$$

Уравнение (22) подробно изучалось в [9], где получен аналитический вид решения (22) при произвольном виде ядра $S_z(q)$. Постоянная α в (21) в силу линейности уравнений положена равной 1. В случае больших $K \gg 1$ можно подставить асимптотику (20) в уравнение (22), которое можно решить непосредственно:

$$\varphi(x) = n^{-x/2}\,[\Gamma(1+1/n-x)/\Gamma(1+1/n+x)]^{-1/2}. \quad (23)$$

Вычисляя вычет функции $F_z(q)$ в полюсе $q=0$, находим [9]:

$$\beta = \frac{2C}{n} + \frac{1}{n}\ln g(\omega)/n^2 + \frac{\pi}{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln S_z(iwn - n/2)\,dw}{\mathrm{ch}^2\pi w}. \quad (24)$$

В случае $K \gg 1$ можно использовать непосредственно решение (23):

$$\beta = \frac{3C}{n} - \frac{\pi^2}{6n} + \frac{1}{n}\ln g(\omega)/n^{5/2}. \quad (25)$$

Подставляя (24) и (25) в (12), находим коэффициент отражения электромагнитных волн электрического типа от плазмы.

Исследуем теперь погонное сопротивление плазмы, для чего необходимо найти мнимую часть (24). В интегральный член в выражении (24) входит $S_z(iwn - n/2)$; используя (19), имеем

$$S_z(iwn - n/2) = K\pi^{-1}\int_0^1 d\mu\,|\rho(\mu,\ iwn - n/2)|^2/\rho(\mu,\ 0)$$

действительное положительное выражение. Поэтому погонное сопротивление плазмы связано только с аргументом $g(\omega)$:

$$\rho_z = 2\omega c^{-2}\,(K-2)^{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\nu_{\text{эфф}}/\omega. \quad (26)$$

Как видно из (26), все сопротивление плазмы определяется только столкновениями частиц в плазме, а бесстолкновительного затухания типа затухания Ландау нет, поскольку частицы в среднем не движутся внутрь плазмы, а совершают лишь колебательные движения по радиусу. При приближении K к 2 погонное сопротивление резко возрастает, что связано с расходимостью полного числа частиц в плазме на больших расстояниях при $K=2$. По этой же причине данным методом нельзя рассматривать концентрацию электронов, спадающую медленнее, чем $(r/a)^{-2}$.

Зная мнимую часть коэффициента отражения, легко оценить и глубину, на которую распространяется волна в плазму, и отсюда получить границы применимости вышеизложенной теории. Эта процедура аналогична плоскому случаю [10]. Как видно из (11) эффективная точка отражения электромагнитной волны определяется равенством $r_0 \sim a \exp(\operatorname{Re}\beta)$, откуда для случая больших $K \gg 1$ получаем, что волна доходит до расстояний

$$r_0 \sim a \left[\frac{\omega_0^2\, \omega a^2}{K^{5/2} c^2 |\omega^*|} \right]^{1/(K-2)},$$

что соответствует концентрациям частиц в области, в которой начинается поглощение, порядка

$$n(r_0) = (n_0 a^K)^{-2/(K-2)} \left[K^{5/2} \frac{|\omega^*|}{\omega} \frac{mc^2}{4\pi e^2} \right]^{K/(K-2)}. \tag{27}$$

Данная теория применима в случае, если зависимость концентрации частиц от расстояния начинает отличаться от степенной при плотностях, превышающих плотность, определяемую (27). Отметим, что в действительную часть β не входит тепловая скорость частиц и поэтому скин-эффект имеет много черт обычного скин-эффекта, а не аномального, несмотря на нелокальную с большим радиусом нелокальности связь тока с полем. Это произошло из-за того, что электроны многократно взаимодействуют с полем за период поля.

§ 3. Взаимодействие плазменного шнура с волной магнитного типа ($\mathbf{E}_z=0$). Производя с уравнением для E_φ преобразования, аналогичные проведенным в предыдущем параграфе, получим функциональное уравнение для преобразования Меллина

$$((q+n)^2-1)\, F_\varphi(q+n) = g(\omega)\, S_\varphi(q)\, F_\varphi(q), \quad n = K-2. \tag{28}$$

Здесь

$$S_\varphi(q) = \frac{K^2}{\pi e} \int_0^1 \mu^2 d\mu\, \rho(\mu,\, q+1)\, \rho(\mu,\, 3-K-q)/\rho(\mu,\, 0), \tag{29}$$

$g(\omega)$ и $\rho(\mu, q)$ определены в (15) и (18). S_φ аналитично в полосе $2-K<\operatorname{Re} q<0$, а в случае больших $K \gg 1$ имеем

$$S_\varphi(q) = K^{1/2}\,[q(2-K-q)]^{-1/2} \approx S_z(q), \quad |q| \gg 1,\ |2-K-q| \gg 1. \tag{30}$$

Некоторые особенности имеет процесс сшивки решения уравнения (28) со свободным решением $E_\varphi(r) = E_{\varphi 0}[\,H_1^{(2)}(\omega r/c) + R_\varphi H_1^{(1)}(\omega r/c)]$. Асимптотика этого решения имеет вид

$$E_\varphi(r) = -\alpha \frac{r}{a}\,(1 + \gamma a^2/r^2 + \ldots), \tag{31}$$

что соответствует особенностям в преобразовании Меллина вида

$$F_\varphi(q)=\alpha[(q+1)^{-1}+\gamma(q-1)^{-1}+\ldots].$$

Коэффициент отражения электромагнитной волны от плазменного шнура с логарифмической точностью запишется в виде

$$R_\varphi=\{2+\gamma[\ln \omega a/2c+i\pi/2]\cdot a^2\omega^2/c^2\}/\{2+\gamma[\ln \omega a/2c-i\pi/2]\cdot a^2\omega^2/c^2\}. \quad (32)$$

Мощность, поглощаемая на единицу длины плазменным шнуром, связана с переменным магнитным полем, амплитуда которого H_0 постоянна на бесконечности, формулой

$$Q=a^2\omega\,|H_0|^2\operatorname{Im}\gamma/2. \quad (33)$$

Уравнение (28) имеет решение

$$F_\varphi(q)=(g(\omega)n^{-2})^{q/n}\,\Gamma\left(\frac{1-q}{n}\right)\Gamma\left(-\frac{1+q}{n}\right)\varphi(q/n), \quad (34)$$

где $\varphi(x)$ — решение уравнения $\varphi(x+1)=S_\varphi(nx)\varphi(x)$.
Отсюда параметр γ выражается в виде [9]:

$$\gamma=\left(\frac{g(\omega)}{n^2}\right)^{2/n}\Gamma\left(-\frac{2}{n}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2}{n}\right)\exp\int\limits_{-\infty}^{\infty}dw\,\frac{\ln S_\varphi(iwn-n/2)\sin 2\pi/n}{\operatorname{ch}2\pi w+\cos 2\pi/n}. \quad (35)$$

В формуле (35) показатель экспоненты, как это следует из (29), является действительным числом. С учетом этого получаем выражение для мнимой части коэффициента γ:

$$\operatorname{Im}\gamma=-\frac{n}{2}\,\frac{\Gamma(1-2/n)}{\Gamma(2/n)}\left(\frac{|g(\omega)|^2}{n^2}\right)^{2/n}\sin\frac{2\arg g(\omega)}{n}\times$$
$$\times\exp\int\limits_{-\infty}^{\infty}dw\,\frac{\ln S_\varphi(iwn-n/2)\sin 2\pi/n}{\operatorname{ch}2\pi w+\cos 2\pi/n}. \quad (36)$$

Из выражения (35) следует, что при приближении K к 4 поглощаемая мощность в плазме растет до бесконечности, что связано с тем, что пренебрегать током вне плазмы по сравнению со вторым членом асимптотики (31) можно лишь при $K>4$, поскольку разные члены в (31) различаются на два порядка (в случае волны электрического типа различие было логарифмическим). В случае $K=4$, в некотором смысле предельном, в решении (34) сливаются два полюса, приводящие к асимптотике логарифмического типа, которая дает логарифмическую расходимость и в γ. Обрезая логарифм на значениях $a\omega/c$, можно изучить и случай $K=4$.

В случае больших значений $K\gg 1$ можно записать следующее выражение для $\operatorname{Im}\gamma$:

$$\operatorname{Im}\gamma=2n^{-1}\operatorname{arctg}\nu_{\text{эфф}}/\omega.$$

В этом предельном случае окончательное выражение для величины поглощения волны также не зависит от $\varphi(q)$. Подставляя его в формулы (32), (33), получим выражение электродинамических характеристик плазмы через параметры задачи.

В случае волны магнитного типа справедливы те же замечания о глубине проникновения электромагнитной волны в плазму и о применимости теории сильного скин-эффекта, что и в случае волны электрического типа. Глубина проникновения оказывается такой же в случае $K \gg 1$, однако она растет до бесконечности не при $K \to 2$, а при $K \to 4$.

Аналогичное исследование взаимодействия волн с плазмой можно провести и для нескомпенсированных электронных пучков [11], в которых электронная концентрация спадает на периферии именно степенным образом. Незначительным отличием от проведенного исследования будет учет направленного движения электронов пучка, что приводит к возможности бесстолкновительного поглощения бегущих вдоль пучка волн, а также их бесстолкновительного усиления при выполнении соответствующих условий. Однако при учете того, что взаимодействие волны с пучком локализовано в основном на периферии пучка, инкременты усиления волн оказываются небольшими.

Автор благодарит акад. И. М. Лифшица и Б. Э. Мейеровича за плодотворные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дикман С. М. «Физика плазмы», 1976, **2**, 555.
2. Storer R. G. „Phys. Fluids“, 1973, **16**, 949.
3. Blevin H. A., Greene J. M., Storer R. G., Jolly D. L. „J. Plasma Physics“, 1973, **10**, 337.
4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., 1957.
5. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. М., 1964, § 33.
6. Либерман М. А., Мейерович Б. Э., Питаевский Л. П. ЖЭТФ, 1972, **62**, 1737.
7. Дикман С. М., Мейерович Б. Э. ЖЭТФ, 1973, **64**, 1653.
8. Мейерович Б. Э. ЖЭТФ, 1976, **71**, 1045.
9. Васильев А. Н., Мейерович Б. Э. ЖЭТФ, 1974, **67**, 1738.
10. Васильев А. Н. ЖЭТФ, 1976, **71**, 2113.
11. Мейерович Б. Э., Сухоруков С. Т. ЖЭТФ, 1975, **68**, 1783.

Кафедра
квантовой теории

Поступила в редакцию
01.07.77