

УДК 535.41 : 535.854

М. А. Х а щ а н (Египет)

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛНОВОГО ЦУГА  
КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ  
В ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ ФАБРИ—ПЕРО

**Введение.** Понятие когерентности развивалось и получило свое определение при создании интерферометров. Интерферометр — это инструмент, с помощью которого определяется корреляция между амплитудами и фазами светового поля по измерению видимости интерференционных полос [1, 2]. Корреляция между световыми колебаниями наблюдается при наложении двух или более волн, на которые разделяется падающая на интерферометр волна.

Две волны считаются когерентными, если они обладают постоянной разностью фаз в течение времени наблюдения. Это простое определение справедливо для интервала времени наблюдения, поскольку волны обычно создаются в виде цугов конечных длин. В теории когерентности света длина цуга волн  $\delta x$  берется за длину когерентности [1—3]. Степень когерентности является более точной и общей величиной, через которую можно определить корреляцию между световыми колебаниями.

Согласно преобразованию Фурье волновой цуг конечной длины математически эквивалентен спектральной линии конечной ширины. Поэтому падение видимости интерферограмм с увеличением разности хода можно объяснить либо учетом спектрального состава излучения, либо с помощью длины когерентности. Применяя спектральные компоненты Фурье, авторы работ [4—8] вычисляли расширение полос интерферометра Фабри—Перо в случае квазимонохроматического излучения. В данной работе расширение полос вычисляется из рассмотрения интерференции цугов конечных длин. Последний прием приводит к выяснению некоторых свойств интерференции квазимонохроматического, т. е. частично когерентного, света. Рассмотрены также некоторые свойства интерференционных светофильтров, зеркал и интерферометра Фабри—Перо как анализатора когерентности [9].

**Число когерентных волн.** В настоящей работе будем использовать время  $\delta t$  или длину  $\delta x$  когерентности для расчета распределения интенсивности по полосам интерферометра Фабри—Перо и для того, чтобы вывести более общую формулу, которая приводит к формуле Эри при частных условиях.

Вводя комплексную амплитуду  $a$ , время  $t$ , расстояние  $x$  вдоль оси распространения, частоту  $\omega$  и волновое число  $k$ , можно описывать конечный цуг плоских волн внутри интервала  $|x| \leq \delta x/2$  формулой  $a \exp[i(\omega t - kx)]$ , где комплексной амплитуде можно приписать постоян-

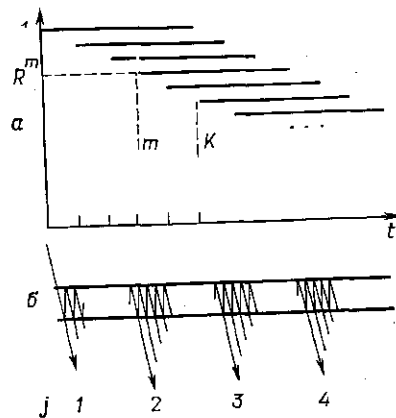
ные значения модуля, фазы и плоскости поляризации. Последние две величины хаотично изменяются вне интервала  $\delta x$ . Это описание можно перевести в более компактную математическую форму с помощью преобразования Фурье [3], которое позволит получить соотношение между длиной когерентности и полушириной спектрального контура.

В интерферометре толщиной  $l$  (оптическое расстояние между отражателями) время  $\tau$  дается формулой  $\tau = 2l/c$ , где  $c = \omega/k$ . Отношение времени когерентности к времени запаздывания  $\tau$  определяет число когерентных волн, создаваемых интерферометром:

$$K = \frac{\delta t}{\tau} = \frac{\delta x}{2l} = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda}. \quad (1)$$

В этом выражении  $\Delta\lambda$  — область дисперсии интерферометра и  $\delta\lambda$  — полуширина спектральной линии, соответствующей падающему пугу.

Рис. 1. Ослабление и запаздывание выделенных пугов. Прямые линии, параллельные оси времени  $t$ , имеют длину, равную времени когерентности, и ординату — амплитуде ( $a$ ), некогерентные группы пугов внутри полости интерферометра (жирные горизонтальные линии — зеркала) ( $\beta$ ). При нормальном падении все группы налагаются друг на друга



**Разделение и ослабление пуга в полости интерферометра.** Рассмотрим вначале поведение одиночного пуга. Проходя через полость интерферометра, пуг волн разделяется на бесконечное число уменьшающихся по амплитуде пугов. Бесконечное число пугов получается только при нормальном падении света на зеркала. Выходя из интерферометра один за другим, пуги частично перекрываются (рис. 1, а). Для вычисления эффекта этого наложения нужно отсчитывать время  $t$  с того момента, когда голова падающего пуга ударяется о заднее зеркало полости. Число интерферирующих когерентных пугов, которые имеют постоянную разность фаз за время наблюдения, обозначим через  $m$ . Это число увеличивается на единицу за каждый интервал времени  $\tau$  и обладает максимальным значением, равным  $K$  (рис. 1).

Пропускаемая интенсивность  $I_1$  растет с течением времени согласно формуле  $I_1 = a^2 T^2 T_m$ , где

$$T_m = \frac{(1 - R^m)^2 + 4R^m \sin^2 m \Phi / 2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \Phi / 2}, \quad (2)$$

$T$  и  $R$  — соответственно коэффициенты пропускания и отражения идентичных зеркал, и разность фаз  $\Phi = 2(kl + \delta)$ , где  $\delta$  — скачок фазы при отражении.

После  $2K$  отражений от обоих зеркал пуг полностью содержится внутри полости и число интерферирующих когерентных пугов достигает максимального значения  $K$ . Затем интенсивность начинает падать согласно формуле  $I_2 = a^2 T^2 T_K R^{2(N-K)}$ , где число отражений  $N = t/\tau > K$ . Так обстоит дело, если мы рассматриваем одиночный падающий пуг. В действительности это имеет место в случае гигантского импульса лазера [9], а в случае обычных источников наблюдается громадное число пугов, спонтанно испущенных миллионами атомов в источнике. Каждый пуг в этом хаотичном составе подвергается тому же разделению и затуханию, которые мы только что описали. При таком предположении можно рассчитать распределение интенсивности по интерферограмме.

**Распределение интенсивности в проходящем свете.** Учитывая все обстоятельства, которые были выше изложены, для пропущенного интерферометром света интенсивность бесконечной последовательности некогерентных пугов волн (рис. 1, б) определяется формулой

$$I = a^2 T^2 \left\{ T_m + T_K \sum_{j=1}^{\infty} R^{2(m+(j-1)K)} \right\}. \quad (3)$$

Первая функция в фигурной скобке представляет собой возрастающую часть интенсивности группы когерентных пугов, на которые разделяется только что входящий пуг. А сумма в (3) учитывает бесконечное число некогерентных групп пугов, которые ослабевают при прохождении внутри полости ( $j$  — номер группы, внутри которой частично налагаются друг на друга  $K$  пугов).

Можно переписать (3) в более компактном виде

$$I = a^2 T^2 \left\{ T_m + R^{2m} \frac{T_K}{1 - R^{2K}} \right\}. \quad (4)$$

Это выражение указывает на флуктуацию интенсивности, поскольку переменное число  $m$  меняется от единицы до  $K$  в пределах временного интервала, равного времени когерентности. Флуктуации труднодоступны для наблюдения ввиду следующих обстоятельств: 1) время наблюдения обычно больше времени когерентности, 2) излучающая среда состоит из атомов-излучателей, число которых во много раз больше числа когерентных волн. При таких условиях приемник света измерит среднее значение интенсивности  $\langle I \rangle$ . Усреднение формулы (4) по величине  $m$  приводит к выражению:

$$\langle I \rangle = a^2 T^2 T_{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{K} \left[ T_{K+1} - R^2 T_K - 1 - \frac{2R^2}{1 - R^2} (1 - R^K \cos K\Phi) \right] \right\}, \quad (5)$$

где

$$T_{\infty} = [(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Phi/2)]^{-1}$$

функция Эри.

Формула (5) определяет свойства полос интерферометра Фабри—Перо в случае квазимонохроматического света.

Максимальная интенсивность определяется формулой

$$\langle I \rangle_{\max} = \left( \frac{aT}{1 - R} \right)^2 \left( 1 - \frac{2R}{K} \frac{1 - R^K}{1 - R^2} \right), \quad (6)$$

а минимальная интенсивность — формулой

$$\langle I \rangle_{\min} = \left( \frac{aT}{1+R} \right)^2 \left( 1 + \frac{2R}{K} \frac{1-(R)^K}{1-R^2} \right). \quad (7)$$

Сравнение максимумов и минимумов распределений Эри и (5) показывает, что в случае квазимонохроматического излучения максимум уменьшается и минимум увеличивается по мере увеличения отношения разности хода к длине когерентности. Максимум и минимум становятся равными и интерференция — недоступной наблюдению, если  $K=1$ . При этом оба уравнения (6) и (7) дают вместе с (5):

$$\langle I \rangle_{K=1} = a^2 T^2 / (1 - R^2). \quad (8)$$

Согласно (8) интенсивность получится равномерной несмотря на небольшое изменение разности хода в пределах одного порядка интерференции. В этом случае контрастность стремится к единице и видимость — к нулю. Таким образом, учет длины когерентности объясняет исчезновение интерференционных полос, которое сопровождается созданием бесконечно длинного затухающего цуга. Этот цуг можно назвать ступенчатым затухающим цугом, так как он состоит из бесконечного числа цугов с равными длинами, но со скачкообразно уменьшающимися амплитудами. Иначе говоря, интерферометр дает возможность сгруппировать короткие цуги в цепочки бесконечной длины, где хвост предыдущего цуга совпадает с головой последующего цуга. Надо отметить, что все короткие цуги с беспорядочными комплексными амплитудами подвергаются такому урегулированию.

Удлинение коротких цугов в интерферометре Фабри—Перо можно вычислить с учетом ослабления ступенчатого цуга, которое можно определить через отношение амплитуд двух соседних ступеней с номерами  $j$  и  $j+1$ :  $a_{j+1}/a_j = R$ . Постоянное  $R$  также имеет и естественно затухающий цуг, для которого отношение амплитуд за интервал времени  $\tau$  дается равенством:  $a_{t+\tau}/a_t = \exp(-\gamma/2\tau)$ . Сравнение последних отношений приводит к уравнению

$$\gamma = \alpha c / l, \quad (9)$$

которое связывает коэффициент отражения  $R$  с коэффициентом естественного затухания  $\gamma$  по формуле  $\alpha = -\ln R$ .

Уравнение (9) можно применять для расчета затухания света в полости, однако надо иметь в виду, что естественно затухающий цуг имеет монотонное падение амплитуды, в то время как ступенчатый цуг состоит из скачкообразных ступеней. Коэффициент затухания излучения в полости (9), становится тем точнее, чем выше коэффициент отражения и чем короче падающий цуг. Согласно преобразованию Фурье,  $\gamma$  (9) определяет частотную полуширину полосы пропускания полости. Уравнения (8) и (9) одновременно указывают на тот факт, что монохроматизация света в полости обычно сопровождается падением интенсивности. Уменьшение интенсивности удлиненных цугов можно восполнить за счет усиления цугов активными веществами в лазерах.

**Расширение полос квазимонохроматического света.** Обозначая фазовые полуширины интерференционных полос для монохроматического и квазимонохроматического излучения через  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon$  соответственно, можно получить с помощью (5) такое соотношение:

$$\sin \varepsilon/2 = \sqrt{B + \sqrt{1 + B^2}} \sin \varepsilon_0/2, \quad (10)$$

где

$$\sin \varepsilon_0/2 = \operatorname{sh} \alpha/2, \quad (11)$$

$$B = \xi \frac{1 - \eta R^K}{K - \eta \frac{1 - R^K}{1 - R}}, \quad (12)$$

$$\xi = \frac{1 + R}{1 - R}; \quad \eta = \frac{2R}{1 + R}. \quad (13)$$

Выражение (10) можно применить для вычисления эффективных чисел интерферирующих волн равных амплитуд  $N_0$  и  $\bar{N}$  для монохроматического и квазимонохроматического света соответственно. Далее можно вычислить отношения полуширин  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon$  или чисел  $\bar{N}_0$  и  $\bar{N}$  в за-

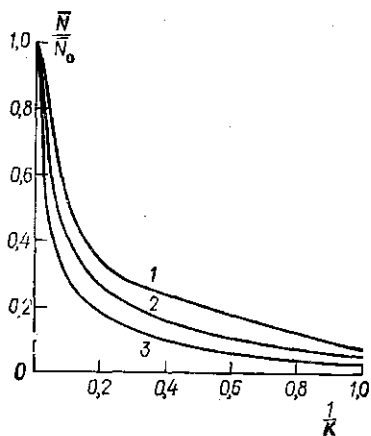


Рис. 2. Относительное расширение интерференционных полос при уменьшении числа когерентных волн  $K$  для различных значений коэффициента отражения  $R$ : 1 — 85, 2 — 90, 3 — 95

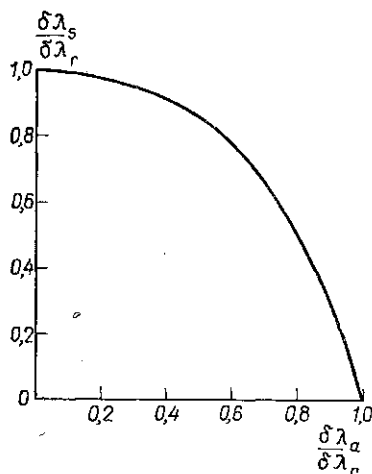


Рис. 3. Соотношение между полуширинами аппаратной, спектральной и результирующей функций.  $\delta\lambda_s$  — полуширина функции Эри,  $\delta\lambda_\alpha$  — полуширина спектральной линии и  $\delta\lambda_r$  — полуширина интерференционной полосы в случае квазимонохроматического света

висимости от числа когерентных волн. Такие отношения определяют относительное расширение полос квазимонохроматического света по мере увеличения разности хода. Эти соотношения графически представлены на рис. 2. Согласно кривым рис. 2 при увеличении разности хода, когда число когерентных волн уменьшается, происходит относительное расширение полос. Относительное расширение тем больше, чем выше коэффициент отражения. Кривые рис. 2 можно собрать на рис. 3 в единую более общую кривую, которая годится для всех значений коэффициента отражения. Такая универсальная кривая дает соотношение между полуширинами резонансного контура полости  $\delta\lambda_\alpha$ , спектральной

линии  $\delta\lambda_s$  и интерференционной полосы  $\delta\lambda_r$ . Кривая рис. 3 позволяет найти любую из полуширин, если известны две другие.

**Отражение цуга от полости.** Поскольку отражение от двухзеркальной системы имеет особую важность при выяснении действия интерференционных зеркал, то мы обсудим здесь, как отразится цуг конечной длины от интерферометра Фабри—Перо. Падающий цуг разделяется при отражении от переднего зеркала и при многократном отражении внутри полости на множество цугов, которые выходят из полости один за другим так, что каждый выделенный цуг запаздывает от предыдущего на время  $\tau$ . За время, меньшее времени когерентности, число интерферирующих волн  $m$  увеличивается. При этом условии результирующая волна дается формулой:

$$S = a \left\{ \frac{\rho_1 - \rho_2 e^{-i\Phi} [1 - \sigma_1^2 \rho_1 \rho_2^{m-1} e^{-i(m-1)\Phi}]}{1 - \rho_1 \rho_2 e^{-i\Phi}} e^{i(\Phi_0 - \delta_1')} \right\}, \quad (14)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — амплитудные коэффициенты отражения переднего и заднего зеркал,  $\sigma_1$  — амплитудный коэффициент пропускания переднего зеркала,  $\Phi_0$  — фаза первого отраженного цуга в момент наблюдения,  $\Phi = 2kl + \delta_1 + \delta_2$  — разность фаз  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_1'$  и  $\delta_2'$  — скачки фаз на зеркалах при отражениях в противоположных направлениях. Формула (14) применяется лишь для диэлектрических поверхностей раздела.

Спустя время, большее времени когерентности, цуг полностью оказывается внутри полости и затухает согласно формуле  $\sigma_1 T_K (\rho_1 \rho_2)^{2(N-K)}$ . Здесь затухание то же самое, как и в проходящем свете. Интенсивность равна сумме интенсивностей бесконечного числа групп цугов, состоящих из  $K$  когерентных цугов:

$$I = a^2 \left\{ \mathcal{R}_m + \sigma_1^2 \rho_1^2 T_K \sum_{j=1}^{\infty} (\rho_1 \rho_2)^{2[(m-1)+j-1]K} \right\}. \quad (15)$$

В (15) мы учитывали цуг, отраженный от переднего зеркала, с помощью выражения

$$\mathcal{R}_m = T_{\infty} [\rho_1^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \Phi + \rho_2^2 + 2\sigma_1^2 (\rho_1 \rho_2)^m \cos m\Phi - 2\sigma_1^2 \rho_2^2 (\rho_1 \rho_2)^{m-1} \times \\ \times \cos(m-1)\Phi + \sigma_1^2 \rho_2^2 (\rho_1 \rho_2)^{2(m-1)}]. \quad (16)$$

Если время наблюдения больше времени когерентности и число атомов излучателей больше числа когерентных волн, то среднее значение интенсивности в приемнике света дается формулой:

$$\langle I \rangle = a^2 T_{\infty} \left\{ \rho_1^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \Phi + \rho_2^2 - \frac{\sigma_1}{K} [\rho_2^2 (T_K - \rho_1^2 \rho_2^2 T_{K-1}) - (T_{K+1} - \right. \\ \left. - \rho_1^2 \rho_2^2 T_K) + (1 + \rho_2^2) - \right. \\ \left. - \frac{2\sigma_1^2 \rho_2^2}{1 - \rho_1^2 \rho_2^2} (1 - \rho_1^K \rho_2^K \cos K\Phi) \right\}. \quad (17)$$

В случае одинаковых коэффициентов отражения  $\rho_1^2 = \rho_2^2 = R$  и (17) приводит к формулам максимальной и минимальной интенсивностей:

$$\langle I \rangle_{\max} = \left( \frac{a}{1+R} \right)^2 \left( 4R - \frac{2RT}{K} \frac{1 - (-R)^K}{1 - R^2} \right), \quad (18)$$

$$\langle I \rangle_{\min} = a^2 \frac{2R}{K} \frac{1 - R^K}{1 - R^2}. \quad (19)$$

Коэффициент отражения от интерферометра в максимуме ( $r_{\max}$ ) и в минимуме ( $r_{\min}$ ) будет

$$r_{\max} = \frac{4R}{(1+R)^2} \left( 1 - \frac{T}{2K} \frac{1 - (-R)^K}{1 - R^2} \right), \quad (18')$$

$$r_{\min} = \frac{2R}{K} \frac{1 - R^K}{1 - R^2}. \quad (19')$$

Из (18) и (19) следует, что в отраженном свете максимум интенсивности уменьшается, а минимум увеличивается, так что видимость падает с увеличением разности хода при интерференции квазимонохроматического света.

Поскольку функция Эри описывает распределение интенсивности света в интерферограмме интерферометра Фабри—Перо в идеальных случаях, когда волновой цуг длится бесконечно долго, а отрезок времени наблюдения бесконечно широк, то более точный расчет интерферограммы должен учитывать конечность времен когерентности и наблюдения. В данной работе функция Эри заменена более общей формулой, которая учитывает реальные условия. Расчет выполнен при использовании из преобразования Фурье длины волнового цуга вместо его спектрального состава. С помощью такого приема вычисления мы пришли к следующим основным результатам.

Выяснен динамический характер многолучевой интерференции с квазимонохроматическим светом в двух случаях. В первом рассматривается одиночный цуг, который может испускаться лазером прерывного действия. Во втором рассмотрена совокупность цугов с хаотически изменяющимися начальными фазами, которые испускаются обычными источниками света.

Определено число когерентных волн в зависимости от отношения длины падающего цуга к разности хода в интерферометре и т. д.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. Ф. А. Королеву за обсуждение данной работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Е. Принципы оптики, гл. 10. М., 1970.
2. Франсон М., Сланский С. «Когерентность в оптике». М., 1967.
3. Королев Ф. А. Теоретическая оптика. М., 1966.
4. Chabbal R. J. „T. Rech. CNRS“, 1953, 24, 138.
5. Krebs K., Sauer A. „Ann. Phys.“, 1953, 13, 359.
6. Bayer-Helms F. „Z. Angew. Phys.“, 1963, 15, 330.
7. Baillik E. A. „Appl. Opt.“, 1966, 5, 170.
8. Hernandez G. „Appl. Opt.“, 1966, 5, 1745.
9. Bradley D., Mc Cuillough A., Mirchel C. „Opt. Acta“, 1969, 16, 735.