

УДК 537.87 : 621.371

В. Д. Гусев, Н. А. Махмутов

ФАЗОВЫЕ И УГЛОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ  
ПРИ РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН  
В ИОНОСФЕРНОМ СЛОЕ

**Введение.** Как известно, форма ионосферных слоев ниже максимума слоя  $F2$  в достаточно широком интервале частот близка к параболической [1]

$$N_0(z) = N_m \left[ 2 \frac{z}{z_m} - \left( \frac{z}{z_m} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где  $z_m$  — высота максимума электронной концентрации  $N_m$ , координата  $z$  отсчитывается от начала слоя ( $N_0(z) \equiv 0$  при  $z \leq 0$  и  $z \geq 2z_m$ ). В соответствии с этим высотная зависимость средней диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon_0(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0(z)}{m_e \omega^2} = 1 - 2 \left( \frac{f_0}{f} \right)^2 \frac{z}{z_m} + \left( \frac{f_0}{f} \right)^2 \left( \frac{z}{z_m} \right)^2, \quad (2)$$

где  $f_0 = \sqrt{N_m e^2 / \pi m_e}$  — критическая частота слоя,  $f = \omega / 2\pi$  — несущая частота радиоволн.

В работе [2] показано, что при отражении волн от параболического слоя под углом  $\theta_0$  на частотах  $f \leq 0,6 f_{\text{мпч}}$ ,  $f_{\text{мпч}} = f_0 / \cos \theta_0$ , в выражении (2) можно пренебречь последним членом, т. е. аппроксимировать параболический слой линейным:

$$\epsilon_0(z) = 1 - z/z_0, \quad z_0 = \frac{z_m}{2} \left( \frac{f}{f_0} \right)^2. \quad (3)$$

Указанные две модели ионосферного слоя являются основными при теоретических исследованиях рассеяния радиоволн КВ диапазона [2, 3]. При этом для расчета фазовых и угловых флуктуаций общепринятым является метод геометрической оптики (ГО), справедливой для крупномасштабных неоднородностей ( $k_0 a \gg 1$ ,  $a$  — размер неоднородностей,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ).

В условиях применимости этого метода, как показано в [2], амплитудные модуляции поля пренебрежимо малы по сравнению с фазовыми:

$$\frac{\langle \chi_1^2 \rangle}{\langle \varphi_1^2 \rangle} \approx D^2 \ll 1, \quad D = \frac{L_{\text{гп}}}{k_0 a^2}, \quad (4)$$

т. е. флуктуации фазы и ее пространственных производных (направляющих косинусов луча) являются основными характеристиками рассеянного в ионосфере поля, связанными с параметрами рассеивающих неоднородностей. Таким образом, исследование этих величин представляет интерес в плане решения как прямой, так и обратной задач теории рассеяния.

**Рассеяние в параболическом слое.** Рассматривается слой со средней диэлектрической проницаемостью (2) и малыми флуктуациями

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0, \quad \langle \varepsilon_1 \rangle = 0, \quad \nu = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll 1, \quad (5)$$

с изомерной гауссовской функцией корреляции:

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \varepsilon_1^2 \rangle e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{a^2}}, \quad \langle \varepsilon_1^2 \rangle = \text{const.} \quad (6)$$

Геометрооптические выражения для фазы и направляющих косинусов луча на выходе из неоднородного слоя, вычисленные в первом приближении ГО, имеют вид

$$\varphi_1 = \frac{k_0}{2} \int_0^{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \frac{\varepsilon_1}{V_{\varepsilon_0}} d\sigma, \quad l_{1x} = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \frac{d\sigma}{V_{\varepsilon_0}}, \quad l_{1y} = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \frac{d\sigma}{V_{\varepsilon_0}}, \quad (7)$$

где интегрирование ведется вдоль невозмущенной траектории, лежащей в плоскости  $xz$  и определяемой уравнением

$$x(z) = z_m p \operatorname{tg} \theta_0 \ln \frac{\sqrt{1-p^2+t^2}-t}{1-p}, \quad t \in [p, -p]. \quad (8)$$

При этом для восходящей траектории

$$t(z) = \frac{p}{c_0} \sqrt{\varepsilon_0(z) - s_0^2} \in [p, 0],$$

а для нисходящей

$$t(z) = -\frac{p}{c_0} \sqrt{\varepsilon_0(z) - s_0^2} \in [0, -p],$$

$$p = \frac{f}{f_{\text{мнч}}}, \quad s_0 = \sin \theta_0, \quad c_0 = \cos \theta_0.$$

Для рассматриваемой модели слоя дисперсии фазы и направляющих косинусов луча, вычисленные на основе (7), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi_1^2 \rangle &= \frac{k_0^2 a^2}{2} \langle l_{1y}^2 \rangle = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_1^2 \rangle k_0^2 z_m a f^{(0)}(p, \theta_0, A), \\ \langle l_{1x}^2 \rangle &= 2\sqrt{\pi} \langle \varepsilon_1^2 \rangle \frac{z_m}{a} f^{(1)}(p, \theta_0, A), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $A = \frac{z_m}{a}$ , а  $f^{(0,1)}(p, \theta_0, A)$  — интегральные функции

$$f^{(0)}(p, \theta_0, A) = \frac{Ap^2}{4\sqrt{\pi c_0^2}} \int_{-p}^p \int_{-p}^p \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{1-p^2+t_1^2} \sqrt{1-p^2+t_2^2}} e^{-A^2[\alpha^2(t_1, t_2) + \beta^2(t_1, t_2)]}, \quad (10)$$

$$f^{(1)}(p, \theta_0, A) = \frac{Ap^2}{4\sqrt{\pi c_0^2}} \int_{-p}^p \int_{-p}^p \frac{dt_1 dt_2 [1 - 2A^2 \alpha^2(t_1, t_2)]}{\sqrt{1-p^2+t_1^2} \sqrt{1-p^2+t_2^2}} e^{-A^2[\alpha^2(t_1, t_2) + \beta^2(t_1, t_2)]}. \quad (11)$$

$$\alpha(t_1, t_2) = \frac{ps_0}{c_0} \ln \frac{\sqrt{1-p^2+t_2^2} - t_2}{\sqrt{1-p^2+t_1^2} - t_1}, \quad \beta(t_1, t_2) = \sqrt{1-p^2+t_1^2} - \sqrt{1-p^2+t_2^2}.$$

При условиях

$$\frac{z_m p}{2} \operatorname{arsh} \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \gg a \text{ для } \theta_0 = 0, \quad (12)$$

$$x_{\text{вых}} = z_m p \operatorname{tg} \theta_0 \ln \frac{1+p}{1-p} \gg a \text{ для } \theta_0 \neq 0, \quad (13)$$

интегралы (10), (11) можно вычислить приближенно, что приводит к следующим выражениям:

$$f^{(0, 1)}(p, \theta_0 = 0, A) = \frac{p^2}{2\sqrt{1-p^2}} \left[ \ln \left( 8A \sqrt{1-p^2} \cdot \frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p} \operatorname{arsh} \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) + \frac{C}{2} \right]; \quad (14)$$

$$f^{(0)}(p, \theta_0 \neq 0) = \begin{cases} \frac{p^2}{2c_0^2 \sqrt{1-p^2}} F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{c_0^2 - p^2}{1-p^2}}\right) \text{ при } p < c_0, \\ \frac{1}{2s_0} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \text{ при } p = c_0, \\ \frac{p}{2s_0 c_0} F\left(\arcsin p, \frac{\sqrt{p^2 - c_0^2}}{ps_0}\right) \text{ при } p > c_0; \end{cases} \quad (15)$$

$$f^{(1)}(p, \theta_0 \neq 0) = \begin{cases} \frac{p^2 \sqrt{1-p^2}}{2(c_0^2 - p^2)} \left[ F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{c_0^2 - p^2}{1-p^2}}\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{c_0^2 - p^2}{1-p^2}}\right) \right] \text{ при } p < c_0, \\ \frac{1}{4s_0} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - s_0 c_0\right) \text{ при } p = c_0, \\ \frac{c_0 p^3}{2s_0 (p^2 - c_0^2)} \left[ \frac{s_0^2}{c_0^2} E\left(\arcsin p, \frac{\sqrt{p^2 - c_0^2}}{ps_0}\right) - \frac{1-p^2}{p^2} \times \right. \\ \left. \times F\left(\arcsin p, \frac{\sqrt{p^2 - c_0^2}}{ps_0}\right) \right] - \frac{p^2}{2c_0} \text{ при } p > c_0; \end{cases} \quad (16)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $F(\varphi, k)$  и  $E(\varphi, k)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

На рис. 1—3 представлены зависимости (14)—(16) для некоторых значений параметров. Из анализа приведенных на рисунках кривых можно сделать следующие выводы:

1. Функции  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$  резко возрастают (рис. 1, 2) при приближении несущей частоты к максимально применимой ( $\rho \rightarrow 1$ ); при этом для наклонного отражения ( $\theta_0 \neq 0$ ) это возрастание имеет логарифмический характер:

$$\text{при } \delta = 1 - \rho \ll 1, f^{(0,1)}(\rho, \theta_0 \neq 0) \approx \frac{1}{2s_0 c_0} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\delta}{2}} \right). \quad (17)$$

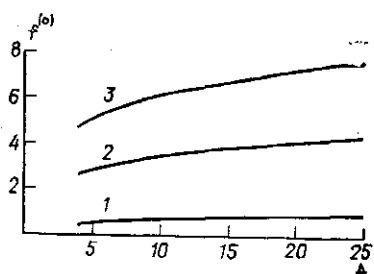


Рис. 1.  $f^{(0)}$  ( $\rho$  — параметр,  $A$  — аргумент,  $\theta_0=0$ ); 1 —  $\rho=0,6$ ; 2 —  $\rho=0,9$  и 3 —  $\rho=0,96$

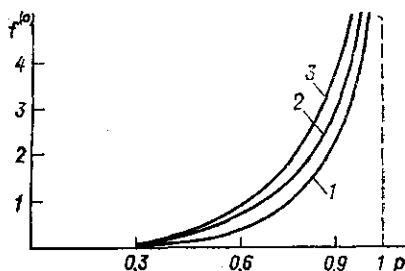


Рис. 2.  $f^{(0)}$  ( $\rho$  — аргумент,  $A$  — параметр,  $\theta_0=0$ ); 1 —  $A=4$ , 2 —  $A=10$  и 3 —  $A=25$

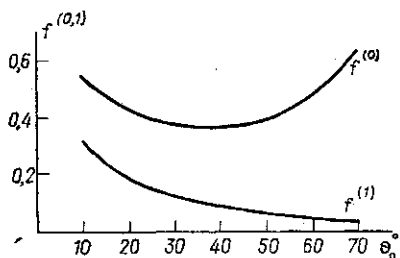


Рис. 3.  $f^{(0,1)}$  ( $\theta_0$  — аргумент,  $\rho=0,6$ )

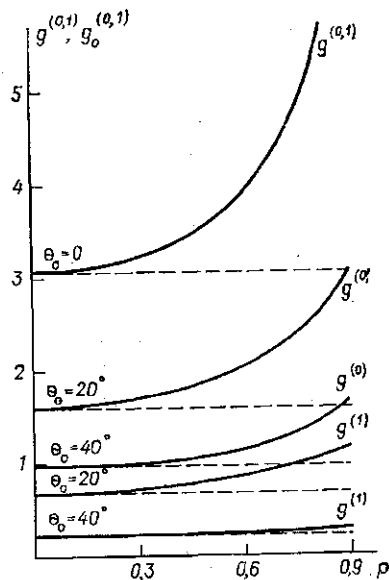


Рис. 4.  $g^{(0,1)}$  (сплошные линии),  $\rho$  — аргумент,  $\theta_0$  — параметр,  $A'=4$ ;  $g_0^{(0,1)}$  (пунктирные)

2. Функция  $f^{(1)}$  монотонно убывает (рис. 3) с возрастанием угла отражения  $\theta_0$  (дальности радиотрассы); а функция  $f^{(0)}$  имеет как области убывания ( $\theta_0 \lesssim 35^\circ$ ), так и области возрастания ( $\theta_0 \gtrsim 35^\circ$ ). Подобный характер зависимости  $f^{(0)}$  от  $\theta_0$  имеет место лишь при  $p = \frac{f}{f_0} \cos \theta_0 = \text{const}$ , т. е. когда несущая частота зависит от угла

отражения ( $f \sim \cos^{-1} \theta_0$ ). Если же обе функции рис. 3 строить при фиксированной частоте, то они будут монотонно убывать с возрастанием  $\theta_0$ , что соответствует монотонному убыванию группового пути волны в слое.

Для каждой заданной радиотрассы и частоты при известных по ионосферным данным значениях  $\langle \varepsilon_1^2 \rangle$  и  $z_m$  уравнения (9), (14)—(16) однозначно связывают дисперсии направляющих косинусов с размерами рассеивающих неоднородностей  $a$ , что позволяет, с одной стороны, прогнозировать возможные значения  $\langle l_{1x}^2 \rangle$ ,  $\langle l_{1y}^2 \rangle$  при измерении  $a$ , а с другой стороны, по результатам угловых измерений определять реализации  $a$ .

Следует отметить, что приближенные выражения (14)—(16) получены из интегралов (10), (11) методом перевала и представляют нулевые члены разложения этих интегралов в ряды по степеням малого параметра ( $a/z_m$ ). Условия (12), (13) применимости этих выражений получены из требования малости первых отброшенных членов в этих рядах и, таким образом, являются достаточными условиями. Необходимые же условия применимости приближенных выражений (14)—(16) будут гораздо слабее.

**Приближение линейного слоя.** Как видно из выражений (2), (3), приближение линейного слоя для дисперсий фазы и направляющих косинусов луча может быть получено следующим образом. Сначала следует в выражениях (8)—(16) заменить  $z_m$  на  $\frac{2z_0}{p_0^2}$ , где  $p_0 = \frac{f}{f_0} = \frac{p}{\cos \theta_0}$ , а затем перейти к пределу при  $p_0 \rightarrow 0$ . При этом уравнение невозмущенной траектории принимает вид

$$x(z) = 2z_0 s_0 (c_0 - \tau), \quad \tau \in [c_0, -c_0], \quad (18)$$

где для восходящей траектории  $\tau(z) = \sqrt{\varepsilon_0(z) - s_0^2} \in [c_0, 0]$ , а для нисходящей  $\tau(z) = -\sqrt{\varepsilon_0(z) - s_0^2} \in [0, -c_0]$ .

Выражения (9) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi_1^2 \rangle &= \frac{k_0^2 a^2}{2} \langle l_{1y}^2 \rangle = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_1^2 \rangle k_0^2 z_0 a g^{(0)}(p, \theta_0, A'), \\ \langle l_{1x}^2 \rangle &= 2\sqrt{\pi} \langle \varepsilon_1^2 \rangle \frac{z_0}{a} g^{(1)}(p, \theta_0, A'), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $g^{(0,1)} \equiv \frac{2f^{(0,1)}}{p_0^2}$ , и при условиях:

$$z_0 \gg a \text{ для } \theta_0 = 0, \quad (20)$$

$$x_{\text{вых}} = 2z_0 \sin 2\theta_0 \gg a \text{ для } \theta_0 \neq 0, \quad (21)$$

функции  $g^{(0,1)}(p, \theta_0, A')$  переходят в известные формулы [2, 4]:

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0} g^{(0,1)}(p, \theta_0 = 0, A') = g_0^{(0,1)}(\theta_0 = 0, A') = \ln 4A' + \frac{C}{2}, \quad (22)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0} g^{(0)}(p, \theta_0 \neq 0) = g_0^{(0)}(\theta_0 \neq 0) = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2}, \quad (23)$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0} g^{(1)}(p, \theta_0 \neq 0) = g_0^{(1)}(\theta_0 \neq 0) = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} - \cos \theta_0, \quad (24)$$

где  $A' = \frac{2z_0}{a}$ .

Отклонение  $g_0^{(0,1)}$  от  $g^{(0,1)}$  (рис. 4) характеризует степень точности аппроксимации параболического слоя линейным и возрастает при приближении частоты к максимально применимой. Отклонение не превышает  $\approx 20\%$  до  $p \leq 0,6$ , что соответствует оценкам [2]. Таким образом, при расчете фазовых и угловых флуктуаций рассеянного в ионосфере поля в широком интервале частот можно пользоваться приближением линейного слоя. Точность такого приближения можно оценить по кривым рис. 4.

Таким образом, в настоящей работе получены аналитические выражения для дисперсий флуктуаций фазы и направляющих косинусов луча при отражении радиоволн от параболического ионосферного слоя с изомерными гауссовскими случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. При низких частотах эти выражения переходят в известные формулы для линейного слоя и существенно отличаются от них при частотах, близких к критической.

Следует отметить, что реальные ионосферные неоднородности характеризуются анизомерной средней формой, учет которой приводит к дополнительной зависимости  $\langle \varphi_1^2 \rangle$ ,  $\langle I_{1x}^2 \rangle$ ,  $\langle I_{1y}^2 \rangle$  от их формы и ориентации. При этом характер зависимости этих величин от частоты, угла отражения и размеров неоднородностей останется прежним.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ануфриева Т. А., Шапиро Б. С. Геометрические параметры слоя F2 ионосферы. М., 1976.
2. Гусев В. Д. Докт. дис. М., 1976.
3. Голынский С. М. Канд. дис. М., 1976.
4. Андреев В. Г., Махмутов Н. А. «Теория дифракции и распространения волн». Сб. докладов 7-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, т. 1. М., 1977.

Кафедра  
волновых процессов

Поступила в редакцию  
22.11.77