УДК 537.87 : 621.371

Н. А. Махмутов

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ТРЕУГОЛЬНОГО СЛОЯ

Введение. При расчете коэффициентов отражения и пропускания плоскослоистых сред, для которых $\varepsilon(z)$ является некоторой заданной в интервале $z \in [a, b]$ функцией и $\varepsilon(z) \equiv 1$ вне этого интервала, обычно используются приближенные формулы [1]. Эти формулы получены из приближенных решений одномерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^2 E}{d z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0, \tag{1}$$

и их применимость ограничена достаточно плавными (с точки зрения использования приближения геометрической оптики) слоями.

В то же время для широкого класса плоскослоистых сред известны точные решения уравнения (1) [1, 2], которые позволяют при довольно слабых ограничениях на параметры слоя получить более точные выражения для коэффициентов отражения и пропускания. В практических задачах исследования ионосферного распространения радиоволн представляет интерес отражение волн от слоев с параболическим и треугольным профилем $\varepsilon(z)$ [3]. При этом, в то время как свойства параболического слоя достаточно хорошо изучены (см. [1] и цитированную там литературу), задача отражения волн от треугольного слоя в литературе не рассматривалась. В то же время часто используемое приближение линейного полупространства [1] справедливо лишь для частот, существенно меньших критической, и требует малости просачивания.

Задача ставится следующим образом (рис. 1). Из области $z<0$, $\varepsilon(z<0) \equiv 1$, в направлении положительной оси z распространяется плоская волна единичной амплитуды, которая, испытывая частичное отражение от слоя $z \in [0, 2z_1]$, проходит в область $z>2z_1$, $\varepsilon(z>2z_1) \equiv 1$. В области $z<0$ поле представляет сумму падающих и отраженных волн

$$E_{\text{I}}(z) = e^{ik_0 z} + R e^{-ik_0 z} \tag{2}$$

в области $z>2z_1$ существуют только падающие волны:

$$E_{\text{VI}}(z) = D e^{ik_0(z-2z_1)}, \tag{3}$$

где R и D — комплексные коэффициенты отражения и пропускания, которые требуется определить.

Как видно из рис. 1, случай *а* моделирует «неотражающий» плазменный слой, в котором критическая частота меньше несущей частоты волны $(f_k/f)^2 = z_1/z_0 < 1$. Случай *б* моделирует «отражающий» плазменный слой, в котором $(f_k/f)^2 = z_1/z_0 > 1$ и волна проходит через область с $\varepsilon(z) < 0$.

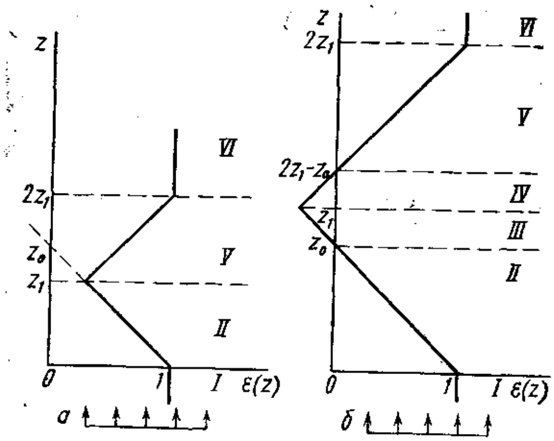

Рис. 1. Треугольный слой: *а* — «неотражающий», *б* — «отражающий». В областях II и III $\varepsilon(z) = 1 - z/z_0$, в областях IV и V $\varepsilon(z) = z/z_0 - (2z_1 - z_0)/z_0$

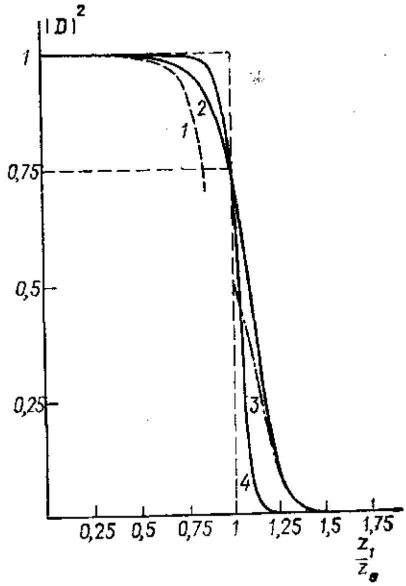

Рис. 2. Параметр z_0/λ_0 для кривых *1*, *2*, *3* = 1,2; для кривой *4* — 4,8

Неотражающий слой. Для треугольного «неотражающего» слоя (рис. 1, *а*) точное решение уравнения (1) в областях II и V может быть представлено в виде [2]:

$$E_{II}(z) = A_{II}^{(1)} t_{II}^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(t_{II}) + A_{II}^{(2)} t_{II}^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(t_{II}), \tag{4}$$

$$E_V(z) = A_V^{(1)} t_V^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(t_V) + A_V^{(2)} t_V^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(t_V), \tag{5}$$

где $t_{II}(z) = \frac{2}{3} k_0 z_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{3/2}$, $t_V(z) = \frac{2}{3} k_0 z_0 \left(\frac{z}{z_0} - \frac{2z_1 - z_0}{z_0}\right)^{3/2}$, $H_{1/3}^{(1,2)}$ — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода соответственно [4], $A_{II,V}^{(1,2)}$ — комплексные постоянные.

Выражения для поля (2)—(5) должны удовлетворять граничным условиям $\left(\text{непрерывность } E \text{ и } \frac{dE}{dz}\right)$ в точках $z=0$, z_1, $2z_1$, что дает 6 линейных алгебраических уравнений для определения 6 неизвестных: R, $A_{II,V}^{(1,2)}$, D. Точное решение этой системы довольно сложно и малоэффективно с точки зрения его практического использования, поэтому ограничимся практически важным случаем достаточно плавного слоя:

$$\frac{2}{3} k_0 z_0 \gg 1 \left(\frac{z_0}{\lambda_0} \gg 0{,}24\right). \tag{6}$$

Это условие позволяет использовать для функций Бесселя от аргумента $\frac{2}{3}k_0 z_0$ асимптотические значения [4], что приводит к следующим выражениям для коэффициентов пропускания и отражения:

$$D = \frac{2k_0}{\sqrt{4k_0^2 + \dot\theta^2(t_A)}} e^{i\left[\frac{4}{3}k_0 z_0 + \frac{2\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{\dot\theta(t_A)}{2k_0} - 2\Phi(t_A)\right]}, \tag{7}$$

$$R = \frac{\dot\theta(t_A)}{\sqrt{4k_0^2 + \dot\theta^2(t_A)}} e^{i\left[\frac{4}{3}k_0 z_0 - \frac{5\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{\dot\theta(t_A)}{2k_0} - 2\Phi(t_A)\right]}, \tag{8}$$

где

$$t_A = t_{\mathrm{II}}(z_1) = t_{\mathrm{V}}(z_1) = \frac{2}{3}k_0 z_0\left(1 - \frac{z_1}{z_0}\right)^{3/2}, \quad \frac{z_1}{z_0} \in (0,\ 1], \Phi(t_A) =$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{N_{1/3}(t_A)}{J_{1/3}(t_A)}, \quad \theta(t_{\mathrm{II}}) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2k_0 z_0}{3}\right)^{1/3} t_{\mathrm{II}}^{2/3}[J_{1/3}^2(t_{\mathrm{II}}) + N_{1/3}^2(t_{\mathrm{II}})] = \frac{1}{m} -$$

обратный эффективный показатель преломления линейного слоя [2], точка сверху означает дифференцирование по z.

Практический интерес представляют коэффициенты пропускания и отражения по мощности, которые с учетом [4]

$$\dot\theta(t_A) = -\pi k_0 t_A\,[J_{1/3}(t_A)J_{-2/3}(t_A) + N_{1/3}(t_A)N_{-2/3}(t_A)] \tag{9}$$

можно представить в виде

$$|D|^2 = 1 - |R|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi t_A}{2}\right)^2 [J_{1/3}(t_A)J_{-2/3}(t_A) + N_{1/3}(t_A)N_{-2/3}(t_A)]^2}. \tag{10}$$

При условии

$$t_A = \frac{2}{3}k_0 z_0\left(1 - \frac{z_1}{z_0}\right)^{3/2} \gg 1, \tag{11}$$

что соответствует частотам, существенно бóльшим критической, можно использовать асимптотические значения и для функций Бесселя от аргумента t_A, и выражение (10) переходит в

$$|D|^2 = \frac{36\,t_A^2}{36\,t_A^2 + 1} \leqslant 1, \tag{12}$$

$$|R|^2 = \frac{1}{36\,t_A^2 + 1} \cong \frac{1}{16\,k_0^2 z_0^2\left(1 - \frac{z_1}{z_0}\right)^3} \ll 1. \tag{13}$$

При этом (13) соответствует формуле (16, 33) работы [1] для коэффициента отражения от скачка производной, полученной при условии справедливости приближения геометрической оптики вне скачка.

Другой предельный случай соответствует условию

$$z_1/z_0 \leqslant 1, \quad t_A \ll 1, \tag{14}$$

т. е. частотам, близким к критической (сверху). Для этого случая можно ограничиться первыми членами рядов для функций Бесселя, что приводит к

$$\lim_{t_A \to 0} |D|^2 = 0{,}75. \tag{15}$$

На рис. 2 представлена зависимость (10) от аргумента z_1/z_0 (область $z_1/z_0 \in (0, 1]$) при двух значениях параметра $z_0/\lambda_0 = 1{,}2$; $4{,}8$. Для сравнения при $z_0/\lambda_0 = 1{,}2$ пунктиром изображена зависимость (12). Как видно из рисунка, отклонение приближенной кривой (12) от точной (10) становится существенным при наличии в слое области с малыми значениями ε (при частотах, близких к критической), что соответствует условию применимости геометрооптического приближения.

Отражающий слой. Для треугольного «отражающего» слоя (рис. 1, *б*) точное решение уравнения (1) в областях II и V также может быть представлено в виде (4), (5). В областях же III и IV в соответствии с [1, 2] поля выражаются через модифицированные функции Бесселя

$$E_{III}(z) = A_{III}^{(1)} t_{III}^{1/3} I_{-1/3}(t_{III}) + A_{III}^{(2)} t_{III}^{1/3} I_{1/3}(t_{III}), \tag{16}$$

$$E_{IV}(z) = A_{IV}^{(1)} t_{IV}^{1/3} I_{-1/3}(t_{IV}) + A_{IV}^{(2)} t_{IV}^{1/3} I_{1/3}(t_{IV}), \tag{17}$$

где $t_{III}(z) = \dfrac{2}{3} k_0 z_0 \left(\dfrac{z}{z_0} - 1\right)^{3/2}$, $\quad t_{IV}(z) = \dfrac{2}{3} k_0 z_0 \left(\dfrac{2z_1 - z_0}{z_0} - \dfrac{z}{z_0}\right)^{3/2}$.

Граничные условия для поля и нормальной производной в точках $z=0$, z_0, z_1, $2z_1 - z_0$, $2z_1$ дают 10 линейных алгебраических уравнений для определения 10 неизвестных: R, $A_{II,\,III,\,IV,\,V}^{(1,\,2)}$, D. В том же приближении (6) решение этой системы для D и R имеет вид

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(I_{-1/3} I_{-2/3} - I_{1/3} I_{2/3})\, e^{i \frac{4}{3} k_0 z_0}}{I_{-1/3} I_{-2/3} + I_{1/3} I_{2/3} + I_{1/3} I_{-2/3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}} + I_{-1/3} I_{2/3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}}, \tag{18}$$

$$R = \frac{1}{2} \frac{[I_{-1/3} I_{-2/3} + I_{1/3} I_{2/3} + 2(I_{1/3} I_{-2/3} + I_{-1/3} I_{2/3})]\, e^{i\left(\frac{4}{3} k_0 z_0 - \frac{\pi}{2}\right)}}{I_{-1/3} I_{-2/3} + I_{1/3} I_{2/3} + I_{1/3} I_{-2/3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}} + I_{-1/3} I_{2/3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}}, \tag{19}$$

где аргумент модифицированных функций Бесселя $t_Б = t_{III}(z_1) = t_{IV}(z_1) = \dfrac{2}{3} k_0 z_0 \left(\dfrac{z_1}{z_0} - 1\right)^{3/2}$, $\dfrac{z_1}{z_0} \gg 1$.

В соответствии с (18), (19):

$$|D|^2 = 1 - |R|^2 = \frac{3/4\,(I_{-1/3} I_{-2/3} - I_{1/3} I_{2/3})^2}{[I_{1/3} I_{-1/3} I_{2/3} I_{-2/3} + (I_{1/3}^2 + I_{-1/3}^2)(I_{2/3}^2 + I_{-2/3}^2) + (I_{1/3} I_{-2/3} + I_{-1/3} I_{2/3}) \times (I_{1/3} I_{2/3} + I_{-1/3} I_{-2/3})]}. \tag{20}$$

При $t_Б \to 0$ $\left(\frac{z_1}{z_0} \to 1\right)$ это выражение сшивается с решением задачи a (см. рис. 2), а при $t_Б \to \infty$ $\left(\frac{z_1}{z_0} \to \infty\right)$

$$\lim_{t_Б \to \infty} |R|^2 = 1, \ \lim_{t_Б \to \infty} \arg R = \frac{4}{3} k_0 z_0 - \frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

что соответствует результатам [1] (полное отражение).

Известное в литературе наиболее общее выражение для коэффициента просачивания через плавный слой с $\varepsilon(z) < 0$ имеет вид [1]

$$|D|^2 = 1 - |R|^2 = \frac{1}{e^{4t_Б} + 1}. \tag{22}$$

Зависимость (22) для $z_0/\lambda_0 = 1{,}2$ изображена на рис. 2 штрих-пунктирной линией. Она дает хорошее совпадение с точной кривой только для $|D|^2 \ll 1$, т. е. для толстых слоев, для которых частота волн существенно меньше критической.

Рассмотренная задача может быть легко обобщена на случай наклонного отражения от слоя. Для этого следует во всех выражениях заменить $\varepsilon(z)$ на $\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0$ [1, 2], где θ_0 — угол отражения.

При этом условие (6) принимает вид

$$2/3\, k_0 z_0 \cos^3\theta_0 \gg 1, \quad \left(\frac{z_0}{\lambda_0} \cos^3\theta_0 \gg 0{,}24\right).$$

Аргументы цилиндрических функций в формулах (7)—(10) и (18)—(20) принимают вид:

$$t_A = \frac{2}{3} k_0 z_0 \left(\cos^2\theta_0 - \frac{z_1}{z_0}\right)^{3/2}, \quad t_Б = \frac{2}{3} k_0 z_0 \left(\frac{z_1}{z_0} - \cos^2\theta_0\right)^{3/2}.$$

Графики, представленные на рис. 2, следует растянуть по оси абсцисс в $\cos^2\theta_0$ раз (граничное значение $|D|^2 = 0{,}75$ будет соответствовать $z_1/z_0 = \cos^2\theta_0$).

Таким образом, в настоящей работе на основе точных решений уравнения Гельмгольца для линейного слоя получены аналитические выражения для комплексных коэффициентов отражения и пропускания треугольного слоя. Для частот, существенно больших и меньших критической, эти выражения дают количественное совпадение с известными приближенными формулами для просачивания волн через скачок производной и через слой с отрицательной диэлектрической проницаемостью; для частот, близких к критической, отличие становится существенным.

Следует отметить, что использованная здесь модель слоя имеет существенный недостаток — разрыв производной $d\varepsilon/dz$, что, вообще говоря, в реальных средах не имеет места, за исключением, может быть, спорадических слоев в ионосфере, где на малых расстояниях возможны резкие изменения вертикального градиента электронной концентрации. Однако, как отмечено в [1, с. 297], нет качественной разницы между отражением от разрыва ε или $\frac{d\varepsilon}{dz}$ и отражением от всего переходного слоя, где на расстоянии $\leqslant \lambda_0$ происходит резкое, но непрерывное изменение ε или $\frac{d\varepsilon}{dz}$. Это дает основание предполагать, что представленные результаты мало чувствительны к некоторому сглаживанию точки разрыва $\frac{d\varepsilon}{dz}$, что будет соответствовать реальной ситуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967.
2. Виноградова М. Б., Гусев В. Д. «Радиотехника и электроника», 1974, **19**, № 3, 481.
3. Ануфриева Т. А., Шапиро Б. С. Геометрические параметры слоя $F2$ ионосферы. М., 1976.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., 1949.

Кафедра
волновых процессов

Поступила в редакцию
14.12.77