

5. Danos S., Greener W. „Phys. Rev.“, 1964, 134B, 284.
6. Semenco S. F. „Phys. Lett.“, 1964, 13, 157.
7. Живописцев Ф. А., Лукашов А. В., Эльтеков В. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном.», 1973, 14, № 2, 201.
8. Zhivopistsev F. A., Lukashov V. A. et al. „Czech. J. Phys.“, 1972, B22, 883.
9. Живописцев Ф. А., Шитикова К. В. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном.», 1978, 19, № 3, 28.

НИИЯФ

Поступила в редакцию
02.06.77

УДК 539.12:530.145

В. А. Ильин

ЛОКАЛЬНЫЕ СЕТИ АЛГЕБР НАБЛЮДАЕМЫХ ДЛЯ СВОБОДНОГО СКАЛЯРНОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПОЛЯ

Основной задачей канонического подхода в квантовой теории поля является нахождение уравнений динамики для наблюдаемых (или для более общих объектов — полей). Однако точные динамические уравнения в релятивистской квантовой теории неизвестны. Поэтому представляет большой интерес изучение наиболее общих свойств всей совокупности наблюдаемых. Алгебраическая формулировка квантовой теории и связана с таким подходом. В ней исходят из того, что наблюдаемые в эксперименте величины можно описывать алгебраически, т. е. можно складывать и перемножать [1]. На алгебры наблюдаемых налагаются условия, имеющие ясный физический смысл, типа условий локальности, релятивистской ковариантности, положительности энергии, полноты и т. д. В результате получается набор аксиом алгебраического подхода, нетривиальный с математической точки зрения. Для изучения алгебр наблюдаемых применяется мощный математический аппарат алгебр фон Неймана и C^* -алгебр [1, 2].

Однако, как и в других аксиоматических схемах, в алгебраическом подходе нет нетривиальной модели в четырехмерном пространстве-времени. Довольно хорошо изучен случай без взаимодействия [1, 3, 4]. Но уже в случае свободного поля возникают нетривиальные моменты, большинство из которых связано с выяснением математической структуры алгебр наблюдаемых. Решению одного из таких вопросов и посвящена работа. Всегда полезно уметь задавать алгебры наблюдаемых, исходя из какого-то набора операторов (образующих). Причем из физических соображений ясно, что множество таких операторов должно быть по крайней мере счетным. А любой элемент алгебры наблюдаемых должен быть (по аналогии с классической и квантовой механикой) функцией от этих операторов или какой-то математической операцией, заменяющей понятие функции в случае некоммутативной алгебры. Обычно же алгебры наблюдаемых в случае заряженного поля определяются, исходя из объекта значительно более широкого, а именно полевой алгебры. В работе в случае заряженного скалярного свободного поля найдено указанное выше множество операторов—образующих. Причем в качестве этого множества можно брать счетное множество операторов.

Следуя [1] (гл. 3), введем классическое фазовое пространство M для нейтрального скалярного поля массы m . M — вещественное предгильбертово пространство функций на гиперboloиде $k^2 = m^2$, являющихся фурье-преобразованиями основных функций из пространства Шварца $\mathcal{S}(R^4)$, со скалярным произведением (вещественным):

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_{k^2=m^2} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \frac{d^3 k}{|k_0|} = \int d^4 x d^4 y f(x) \mathcal{D}_1(x-y) g(y),$$

где $f(x)$, $g(x)$ являются фурье-преобразованиями от $\tilde{f}(k)$, $\tilde{g}(k)$. Мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [5] для различных сверткок поля (т. е. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^-$, $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^c$ и т. д.).

На M можно ввести ортогональное преобразование

$$j[\tilde{f}(k)] = i\varepsilon(k)\tilde{f}(k), \quad \varepsilon(k) = \text{sign } k_0$$

и соответствующую структуру комплексного предгильбертова пространства

$$(a+ib)\tilde{f} = a\tilde{f} + bj[\tilde{f}]; \quad a, b \in R_1;$$

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = (\tilde{f}, \tilde{g}) - i(j[\tilde{f}], \tilde{g}) = \int d^4 x d^4 y f(x) \mathcal{D}^-(x-y) g(y).$$

Рассмотрим теперь фоковское представление канонических перестановочных соотношений (КПС) [6]: $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in M$ зададим стандартным образом на фоковском пространстве $\mathcal{H}_F$ неограниченные операторы рождения и уничтожения $a^*(\tilde{f})$ и $a(\tilde{g})$, определенные на плотном множестве $\Delta_F \subset \mathcal{H}_F$. Δ_F строится действием конечных полиномов по операторам рождения на вакуум ω_F . Известно [7], что оператор

$$R(\tilde{f}) = a^*(\tilde{f}) + a(\tilde{f}), \quad (1)$$

определенный на Δ_F , самосопряжен в существенном на Δ_F , т. е. его замыкание существует и есть самосопряженный оператор. Оператор (1) — свободное нейтральное скалярное поле массы m . Можно проверить, что Δ_F инвариантна относительно действия операторов поля: $\Delta_F \supset R(\tilde{f})\Delta_F$. На Δ_F выполняются перестановочные соотношения

$$[R(\tilde{f}), R(\tilde{g})] = -i \text{Im} \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle I = i(j[\tilde{f}], \tilde{g}) I. \quad (2)$$

Для построения свободного заряженного скалярного поля рассмотрим два приводимых представления КПС в форме Гейзенберга [6] в $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_F \otimes \mathcal{H}_F$: $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in M$ зададим на $\Delta_0 = \Delta_F \otimes \Delta_F$ симметрические операторы $R(\tilde{f}) \otimes I$ и $I \otimes R(\tilde{g})$. Относительно гильбертовых тензорных произведений и алгебр операторов на них см. [2, с. 21–24]. В работе [7, с. 25–26] показано, что симметрический оператор $R(\tilde{f})$ имеет в об-

ласти своего определения Δ_F плотное множество аналитических векторов Δ_F^a , т. е. $\forall \Phi \in \Delta_F^a \exists s > 0: \sum_0^\infty \|R^n(\tilde{f})\Phi\| \frac{s^n}{n!} < \infty$.

Учитывая, что $\|R(\tilde{f}) \otimes I \cdot \Phi_1 \otimes \Phi_2\| = \|R(\tilde{f})\Phi_1\| \cdot \|\Phi_2\|$, получим, что множество $\Delta_F^a \otimes \Delta_F^a$ является множеством аналитических векторов для введенных операторов $R(\tilde{f}) \otimes I$ и $I \otimes R(\tilde{g})$. Тем самым эти операторы, по теореме Нельсона [7, 8], являются самосопряженными в существенном на Δ_0 .

Операторы заряженного поля введем на Δ_0 как неограниченные операторы:

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{f}) &= a^*(\tilde{f}) \otimes I + I \otimes a(\tilde{f}), \\ \varphi^*(\tilde{g}) &= a(\tilde{g}) \otimes I + I \otimes a^*(\tilde{g}),\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}a^*(\tilde{f}) &= \frac{1}{2} \left[R(\tilde{f}) + \frac{1}{i} R(U[\tilde{f}]) \right], \\ a(\tilde{g}) &= \frac{1}{2} \left[R(\tilde{g}) - \frac{1}{i} R(U[\tilde{g}]) \right].\end{aligned}\tag{4}$$

На Δ_0 имеем $[\varphi(\tilde{f}), \varphi^*(\tilde{g})] = -i \operatorname{Im} \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle I$, $\varphi^+(\tilde{f}) \supseteq \varphi^*(\tilde{f})$, $[\varphi^*(\tilde{g})]^+ \supseteq \varphi(\tilde{g})$ где знаком $+$ обозначено сопряжение операторов.

Множество Δ_0 можно задавать действием на вакуум $\omega_0 = \omega_F \otimes \omega_F$ конечных полиномов по полям φ и φ^* , либо полиномов от операторов $R(\tilde{f}) \otimes I$ и $I \otimes R(\tilde{g})$. Δ_0 инвариантна относительно действия указанных операторов.

Пусть $f(x) \in \mathcal{S}(R^4)$. Фурье-образ $\tilde{f}(k)$ задает некоторую функцию на гиперboloиде $k^2 = m^2$. Ясно, что многим функциям из $\mathcal{S}(R^4)$ соответствует одна функция на гиперboloиде. Тем самым $\mathcal{S}(R^4)$ разбивается на классы эквивалентности. Будем говорить, что $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O} \subset R^4$, если существует представитель из класса $\tilde{f}(x)$ с носителем в $\mathcal{O}$. Пусть неограниченный оператор $\mathcal{D}$ определен на плотном множестве векторов $\Delta(\mathcal{D})$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем по определению считать, что $(\mathcal{D})'$ есть множество ограниченных операторов C , таких, что $\forall \Phi \in \Delta(\mathcal{D}), \Psi \in \Delta(\mathcal{D}^+)$ выполняется

$$(\Psi, C\mathcal{D}\Phi) = (\mathcal{D}^+\Psi, C\Phi).\tag{5}$$

В $\mathcal{B}(\mathcal{H}_F)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ введем полевые алгебры соответственно для нейтрального и заряженного полей.

Определение 1. $\forall \mathcal{O} \subset R^4$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_F(\mathcal{O}) &= \{R(\tilde{f}) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}\}'' , \\ \mathcal{F}_0(\mathcal{O}) &= \{\varphi(\tilde{f}), \varphi^*(\tilde{g}) : \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subset \mathcal{O}\}'' .\end{aligned}\tag{6}$$

Пусть $C \in (\mathcal{F}_F(\mathcal{O}))'$. Следовательно, выполняется (5) с $\mathcal{D} = R(\tilde{f})$, $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$. Но $R(\tilde{f})$ самосопряжен в существенном на Δ_F , следовательно, он замыкаем, и его замыкание есть $R^+(\tilde{f})$. Используя замкнутость $R^+(\tilde{f})$, получим, что (5) выполняется $\forall \Phi, \Psi \in \Delta(R^+(\tilde{f}))$. Но тогда из (5) следует, что $\forall \Phi \in \Delta(R^+(\tilde{f})), C\Phi \in \Delta(R^+(\tilde{f}))$. Тем самым получаем $C R^+(\tilde{f}) \subseteq R^+(\tilde{f}) C$. Из спектральной теоремы следует (см. [9, с. 424]), что тогда C коммутирует со всеми спектральными проекторами для $R^+(\tilde{f})$. Верно и обратное. Отсюда следует, что

$$\mathcal{F}_F(\mathcal{O}) = \{e^{iR^+(\tilde{f})} : \text{supp } f \subset \mathcal{O}\}''. \quad (7)$$

Пусть Ξ — гиперплоскость $x_0 = \text{const}$ в R^4 . Ω — открытая ограниченная область в Ξ с достаточно гладкой границей [3]. Пусть $\Omega' = \Xi \setminus \Omega$, Ω^c — причинная тень от Ω , т. е.

$$\Omega^c = \{x \in R^4 : (x-y)^2 < 0 \ \forall y: \\ (y-z)^2 < 0, z \in \Omega\}.$$

Далее везде $\mathcal{O} \subset R^4$ будет только типа Ω^c . Известно [3, 4], что $\forall \Omega \in \Xi$ выполняется причинность и дуальность

$$\mathcal{F}_F(\Omega^c) = \mathcal{F}_F(\Omega) = \bigcap_{\mathcal{O} \supset \Omega} \mathcal{F}_F(\mathcal{O}),$$

$$\mathcal{F}'_F(\Omega') = \left(\bigcup_{\Omega_i \subset \Omega'} \mathcal{F}_F(\Omega_i) \right)' = \mathcal{F}_F(\Omega).$$

Используя определения (6), (3), (4), можно получить, что

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{O}) = \{R(\tilde{f}) \otimes I, I \otimes R(\tilde{g}) : \text{supp } f \cup \text{supp } g \subset \mathcal{O}\}''. \quad (8)$$

Аналогично (7) получим, что

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{O}) = \{e^{i(R(\tilde{f}) \otimes I)^+}, e^{i(I \otimes R(\tilde{g}))^+} : \text{supp } f \cup \text{supp } g \subset \mathcal{O}\}'.$$

Из (8) следует, что

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{F}_F(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{F}_F(\mathcal{O}), \quad (9)$$

в частности

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{O}) = \{e^{iR^+(\tilde{f})} \otimes I, I \otimes e^{iR^+(\tilde{g})} : \text{supp } f \cup \text{supp } g \subset \mathcal{O}\}''. \quad (10)$$

В (9), следуя [2], символом $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_i$ — алгебры фон Неймана в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_i$, обозначим алгебру фон Неймана в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, порожденную операторами $R_1 \otimes R_2 + \dots + T_1 \otimes T_2$; $R_i, T_i \in \mathfrak{M}_i$. Тогда (9) следует из (8), учитывая, что на Δ_0

$$R(\tilde{f}) \otimes I \cdot I \otimes R(\tilde{g}) = R(\tilde{f}) \otimes R(\tilde{g}).$$

Из (9) или (10) следует сразу причинность

$$\mathcal{F}_0(\Omega^c) = \mathcal{F}_0(\Omega) \equiv \left\{ \bigcap_{\mathcal{O} \supset \Omega} \mathcal{F}_0(\mathcal{O}) \right\}. \quad (11)$$

Используя (10), нетрудно дать для $\mathcal{F}_0(\Omega)$ независимое определение (так называемое «equal time», см. [3, 4]). В [4] для $\mathcal{F}_0$, определенной в «equal time» формулировке, доказана дуальность

$$\mathcal{F}_0(\Omega) = \mathcal{F}'_0(\Omega'). \quad (12)$$

Перейдем теперь к главной нашей задаче — явному заданию алгебр наблюдаемых в случае заряженного скалярного поля.

На $\mathcal{H}_0$ зададим унитарное, сильно непрерывное представление калибровочной группы $G = U(1)$. Пусть $\Phi \in \Delta_0$. Тогда по определению $\Phi = P(\varphi, \varphi^*) \omega_0$, где $P(\varphi, \varphi^*)$ — полином по полям. $\forall \alpha \in R^1$ определим оператор $U(e^{i\alpha})$ на Δ_0 :

$$U(e^{i\alpha}) \Phi = P(e^{i\alpha} \varphi, e^{-i\alpha} \varphi^*) \omega_0.$$

Очевидно, что $U(e^{i\alpha})$ расширяется до унитарного оператора на $\mathcal{H}_0$. Имеем также

$$U(e^{i\alpha}) \varphi(\tilde{f}) U^{-1}(e^{i\alpha}) = \varphi(\tilde{f}) e^{i\alpha}, \quad (13)$$

$$U(e^{i\alpha}) \varphi^*(\tilde{g}) U^{-1}(e^{i\alpha}) = \varphi^*(\tilde{g}) e^{-i\alpha}.$$

Заметим, что генератором построенной группы будет оператор заряда (см. [5]). Очевидно, что наблюдаемые должны коммутировать с оператором заряда. Тем самым естественно наблюдаемые определять следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2. Алгебры наблюдаемых в области $\mathcal{O} \subset R^4$ для заряженного поля есть

$$\mathfrak{H}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{F}_0(\mathcal{O}) \cap [U(G)]'. \quad (14)$$

Заметим, что из (14) и (11) следует причинность $\mathfrak{H}_0(\Omega^c) = \mathfrak{H}_0(\Omega)$. А из (12) следует дуальность в каждом секторе $E_q \mathcal{H}_0$ (где E_q — спектральные проекторы оператора заряда):

$$E_q \mathfrak{H}_0(\Omega) E_q = [E_q \mathfrak{H}_0(\Omega') E_q]',$$

здесь коммутатор в правой части берется в $\mathcal{B}(E_q \mathcal{H}_0)$.

Очевидно, на Δ_0 можно определить неограниченный оператор $\varphi(\tilde{f}) \varphi^*(\tilde{g})$. Рассмотрим тогда алгебры

$$\mathfrak{H}(\mathcal{O}) \equiv \{\varphi(\tilde{f}) \varphi^*(\tilde{g}) : \text{supp } \tilde{f} \cup \text{supp } \tilde{g} \subset \mathcal{O}\}'. \quad (15)$$

Т е о р е м а.

$$\mathfrak{H}_0(\mathcal{O}) = \mathfrak{H}(\mathcal{O}). \quad (16)$$

Доказательство. Включение $\mathfrak{M}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{M}_0(\mathcal{O})$ очевидно. Надо доказать обратное включение $\mathfrak{M}_0(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{O})$.

Рассмотрим оператор заряда Q и его спектральное разложение $Q = \sum_0^\infty E_q$. Положим по определению $\mathcal{H}_q = E_q \mathcal{H}_0$, $\pi_q(\mathfrak{M}_0(\mathcal{O})) \equiv E_q \mathfrak{M}_0(\mathcal{O}) E_q|_{\mathcal{H}_q}$. Аналогично определим $\pi_q(\mathfrak{M}(\mathcal{O}))$. Покажем, что $\forall q \pi_q(\mathfrak{M}_0(\mathcal{O})) \subset \pi_q(\mathfrak{M}(\mathcal{O}))$. Очевидно, что отсюда следует требуемое включение $\mathfrak{M}_0(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{O})$. Пусть $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_q)$ и $\mathcal{D} \in [\pi_q(\mathfrak{M}(\mathcal{O}))]'$. Пусть $C \in \pi_q(\mathfrak{M}_0(\mathcal{O}))$. Надо доказать, что $[C, \mathcal{D}] = 0$. Продолжим операторы C и $\mathcal{D}$ на все $\mathcal{H}_0$, положив $\forall q' \neq q \ C|_{\mathcal{H}_{q'}} = \mathcal{D}|_{\mathcal{H}_{q'}} = I_{q'}$ — единичному оператору на $\mathcal{H}_{q'}$. Тогда имеем: $C \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{O})$, $\mathcal{D} \in [\mathfrak{M}(\mathcal{O})]'$ и $\mathcal{D} \in \mathfrak{M}_0(R^4) = [U(\mathcal{O})]'$. Очевидно, надо показать, что $\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H}_q$ и $\forall \varepsilon > 0$

$$|(\Phi, C \mathcal{D} \Psi) - (\Phi, \mathcal{D} C \Psi)| < \varepsilon. \quad (17)$$

Заметим, что (17) достаточно показать для C самосопряженного и $\|C\| = 1$, и $\mathcal{D}$ унитарного, а также для $\Phi, \Psi \in \Delta$ — плотное множество векторов в $\mathcal{H}_q$. Построим сначала множество Δ . Как показано в работе [7, с. 25–26], для любой области $\mathcal{O} \subset R^4$ существует плотное в $\mathcal{H}_F$ множество векторов $\Delta_F^q(\mathcal{O})$ из Δ_F , аналитических для любого оператора $R(\tilde{f})$ с $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$.

Будем доказывать (17) для векторов $\Phi \equiv \Phi_1 \otimes \Phi_2$ и $\Psi \equiv \Psi_1 \otimes \Psi_2$ из $E_q[\Delta_F^q(\mathcal{O}) \otimes \Delta_F^q(\mathcal{O})] \equiv \Delta$ (это множество, как легко проверить, плотно в $\mathcal{H}_q$ и содержится в Δ_0).

Так как по выбору $C \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}_0(\mathcal{O})$, то из (10) следует, что существует последовательность ограниченных операторов

$$C_n = \sum_{k=1}^n \tilde{b}_{kn} e^{iR^+(\tilde{f}_1^{kn})} I \otimes \dots e^{iR^+(\tilde{f}_k^{kn})} \otimes I e^{iR^+(\tilde{g}_1^{kn})} \dots I \otimes e^{iR^+(\tilde{g}_k^{kn})},$$

такая, что C_n сходится в сильной топологии на $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ к C . Используя КПС (2), C_n можно представить в виде

$$C_n = \sum_{k=1}^n b_{kn} e^{iR^+(\tilde{f}_{kn})} \otimes e^{iR^+(\tilde{g}_{kn})},$$

причем так как $\|C\| = 1$, то можно считать, что

$$|b_{kn}| \leq 1.$$

Следовательно,

$$\forall \Phi, \Psi \in \Delta \subset \Delta_0 \text{ и } \forall \delta_1 > 0 \exists n: |(\Phi, C \mathcal{D} \Psi) - (C_n^+ \Phi, \mathcal{D} \Psi)| < \delta_1, \quad (18)$$

$$|(\Phi, \mathcal{D} C \Psi) - (\mathcal{D}^{-1} \Phi, C_n \Psi)| < \delta_1.$$

Обозначим для краткости записи $R^+(\tilde{f}_{kn}) \equiv A_k$, $R^+(\tilde{g}_{kn}) \equiv B_k$.

Для оператора A_k по теореме о спектральном представлении ([9], с. 375) существует множество векторов $a_\alpha \in \mathcal{H}_F$, такое, что

$\mathcal{H}_F = \sum \oplus \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$, где $\mathcal{H}_\alpha = U L_2(\nu_\alpha)$, U — изометрический оператор, а $L_2(\nu_\alpha)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций относительно меры $\nu_\alpha(\lambda) = (E(\lambda) a_\alpha, a_\alpha)$, $E(\lambda)$ — спектральные проекторы для A_k , $\lambda \in R^1$. Для любой борелевской функции $F(\lambda)$ существует, вообще говоря, неограниченный оператор $F(A_k)$ (см. [9], с. 362), причем $F(A_k) a_\alpha = U F(\lambda) U^{-1} a_\alpha$. Тогда по определению пусть $K(A_k)$ есть векторы типа $F(A_k) a_\alpha$ (где $F(\lambda)$ — непрерывная функция с компактным носителем) и их конечные линейные комбинации. Очевидно, это множество плотно в $\mathcal{H}_F$. Из [9, с. 365] следует, что для любых борелевских $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ справедливо (здесь $\Delta(T)$ — область определения оператора T)

$$\Delta(F(A_k)G(A_k)) = \Delta(FG(A_k)) \cap \Delta(G(A_k)). \quad (19)$$

Из (19) следует, что векторы из $K(A_k)$ принадлежат области определения любого полинома от A_k . Из плотности $K(A_k)$ в $\mathcal{H}_F$ следует, что

$$\forall \delta_2 > 0 \quad \exists \Phi_{k1}, \Psi_{k1} \in K(A_k): \|\Phi_{k1}\| = \|\Psi_{k1}\| = 1, \quad (20)$$

$$\|\Phi_1 - \Phi_{k1}\| < \frac{\delta_2}{2n}, \quad \|\Psi_1 - \Psi_{k1}\| < \frac{\delta_2}{2n}.$$

Напомним, что $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ и $\Psi = \Psi_1 \otimes \Psi_2$.

Для операторов B_k найдем аналогично множество $K(B_k)$, и для δ_2 векторы $\Phi_{k2}, \Psi_{k2} \in K(B_k)$, отстоящие от Φ_2 и Ψ_2 , соответственно по норме меньше, чем на $\frac{\delta_2}{2n}$. Тогда из (18)

$$|(\Phi, C\mathcal{D}\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (e^{-iA_k} \Phi_{k1} \otimes e^{iB_k} \Phi_{k2}, \mathcal{D}\Psi)| < \delta_1 + \delta_2, \quad (21)$$

$$|(\Phi, \mathcal{D}C\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (\mathcal{D}^{-1}\Phi, e^{iA_k} \Psi_{k1} \otimes e^{iB_k} \Psi_{k2})| < \delta_1 + \delta_2.$$

Заметим, что функция $e^{i\lambda}$ есть на каждом компакте равномерный предел последовательностей $\sum_0^r \frac{i^p}{p!} \lambda^p$. Отсюда и из теоремы о спектральном представлении следует, например, что

$$P_r^+(A_k) \Phi_{k1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-iA_k} \Phi_{k1},$$

где

$$P_r(A_k) = \sum_{p=0}^r \frac{i^p}{p!} A_k^p.$$

Следовательно, выбрав достаточно большое r , можно получить из (21) следующую оценку: $\forall \delta_3 > 0 \quad \exists r$:

$$\|(\Phi, C\mathcal{D}\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (P_r^+(A_k) \Phi_{k1} \otimes P_r^+(B_k) \Phi_{k2}, \mathcal{D}\Psi)\| < \sum_{i=1}^3 \delta_i,$$

$$|(\Phi, \mathcal{D}C\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (\mathcal{D}^{-1}\Phi, P_r(A_k)\Psi_{k1} \otimes P_r(B_k)\Psi_{k2})| < \sum_{i=1}^3 \delta_i,$$

а также

$$\|P_r^+(A_k)\Phi_{k1} \otimes P_r^+(B_k)\Phi_{k2}\| < 2, \quad (23)$$

и

$$\|P_r(A_k)\Psi_{k1} \otimes P_r(B_k)\Psi_{k2}\| < 2.$$

Рассмотрим векторы $\mathcal{D}\Psi$ и $\mathcal{D}^{-1}\Phi$. Очевидно

$$\forall \delta_4 > 0 \exists \Psi_k(\mathcal{D}), \Phi_k(\mathcal{D}) \in K(A_k) \otimes K(B_k): \|\Psi_k(\mathcal{D})\| = \|\Phi_k(\mathcal{D})\| = 1 \quad (24)$$

$$\|\mathcal{D}\Psi - \Psi_k(\mathcal{D})\| < \delta_4/2n, \quad \|\mathcal{D}^{-1}\Phi - \Phi_k(\mathcal{D})\| < \delta_4/2n.$$

Тогда из (22), (23), (24) следует, что

$$|(\Phi, C\mathcal{D}\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (P_r^+(A_k)\Phi_{k1} \otimes P_r^+(B_k)\Phi_{k2}, \Psi_k(\mathcal{D}))| < \sum_{i=1}^4 \delta_i,$$

$$|(\Phi, \mathcal{D}C\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (\Phi_k(\mathcal{D}), P_r(A_k) \otimes P_r(B_k)\Psi_{k2})| < \sum_{i=1}^4 \delta_i.$$

Заметим, что r можно было бы выбрать настолько большим, что выполнилось бы

$$\|P_r(A_k) \otimes P_r(B_k)\Psi_k(\mathcal{D})\| < 2, \quad \|P_r^+(A_k) \otimes P_r^+(B_k)\Phi_k(\mathcal{D})\| < 2.$$

Тогда, учтя (20), получим

$$|(\Phi, C\mathcal{D}\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (\Phi, P_r(A_k) \otimes P_r(B_k)\Psi_k(\mathcal{D}))| < \sum_{i=1}^4 \delta_i + 2\delta_2, \quad (25)$$

$$|(\Phi, \mathcal{D}C\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (P_r^+(A_k) \otimes P_r^+(B_k)\Phi_k(\mathcal{D}), \Psi)| < \sum_{i=1}^4 \delta_i + 2\delta_2.$$

Вспомним теперь, что Φ_1 и Ψ_1 — аналитические векторы для всех A_k , а Φ_2 и Ψ_2 — для всех B_k . Это значит [7], например, что $\exists s_k > 0$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\|A_k^t \Phi_1\|}{t!} s_k^t < \infty. \quad (26)$$

В [5] приведена также оценка

$$|(\omega_F, R^t(f) \tilde{\omega}_F)| \leq a(f)^{\frac{t}{2}} \frac{t!}{\left[\frac{t}{2}\right]!} < \frac{1}{4} t!,$$

где второе неравенство выполняется с некоторого t_0 . Но тогда из результата работы [7, с. 26] следует, что ряд (26) сходится при $s=1$. Обозначим наибольшее из чисел

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\|A_k^t \Phi_1\|}{t!}, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\|A_k^t \Psi_1\|}{t!}, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\|B_k^t \Phi_2\|}{t!}, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\|B_k^t \Psi_2\|}{t!}$$

через N . Тогда из (25) и (24) получим оценку

$$|(\Phi, C\mathcal{D}\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (P_r^+(A_k) \otimes P_r^+(B_k) \Phi, \mathcal{D}\Psi)| < 2 \sum_{i=1}^4 \delta_i + N^2 \delta_4, \quad (27)$$

$$|(\Phi, \mathcal{D}C\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (\mathcal{D}^{-1} \Phi, P_r(A_k) \otimes P_r(B_k) \Psi)| < 2 \sum_{i=1}^4 \delta_i + N^2 \delta_4.$$

Теперь мы хотим воспользоваться фактами: $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}_q$; $C, \mathcal{D} \in \mathfrak{U}_0(R^4) = [U(G)]'$. Рассмотрим функции

$$T_1(\alpha) = (\Phi, C\mathcal{D}\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (U^+(e^{i\alpha}) P_{rk}^+(\varphi, \varphi^*) U(e^{i\alpha}) \Phi, \mathcal{D}\Psi) = T_1(0),$$

$$T_2(\alpha) = (\Phi, \mathcal{D}C\Psi) - \sum_{k=1}^n b_{kn} (\mathcal{D}^{-1} \Phi, U^+(e^{i\alpha}) P_{rk}(\varphi, \varphi^*) U(e^{i\alpha}) \Psi) = T_2(0).$$

Здесь полином по полям φ и φ^* $P_{rk}(\varphi, \varphi^*) \equiv P_r(A_k) \otimes P_r(B_k)$. При этом мы учли, что $A_k = R^+(\tilde{f}_{kn})$, $B_k = R^+(\tilde{g}_{kn})$ и использовали определение поля φ (3) и (4).

Очевидно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{1,2}(\alpha) d\alpha = T_{1,2}(0).$$

Но в результате усреднения по группе $U(G)$ из полиномов $P_{rk}(\varphi, \varphi^*)$ останутся благодаря (13) только те мономы по φ и φ^* , в которых находится одинаковое количество полей φ и φ^* соответственно. Обозначим получившийся полином через $P_{rk0}(\varphi, \varphi^*)$. Но тогда, учитывая $\mathcal{D} \in \mathfrak{U}(\mathcal{O})'$ (т. е. формулу (5)), получим

$$(P_{rk0}^+(\varphi, \varphi^*) \Phi, \mathcal{D}\Psi) = (\mathcal{D}^{-1} \Phi, P_{rk0}(\varphi, \varphi^*) \Psi). \quad (28)$$

Из (28) и (27), если выбрать подходящие δ_i ($i=1, \dots, 4$), получим (17).

Тем самым доказательство теоремы закончено.

Заметим, что, используя (15), нетрудно дать для алгебр наблюдаемых $\mathfrak{U}_0(\mathcal{O})$ каноническую (так называемую «equal time» [3, 4]) формулировку, что может оказаться полезным для выяснения конкретных свойств алгебр $\mathfrak{U}_0(\mathcal{O})$. Отметим также, что четные комбинации полей сохраняют заряд, но заранее совсем не очевидно, что такие комбинации имеют максимальный характер (16).

Таким образом, алгебры наблюдаемых $\mathfrak{H}_0(\mathcal{O})$, определенные через полевые алгебры формулой (14), можно получить явно, как второй коммутант множества образующих $\varphi(f)\varphi^*(g)$ с $\text{supp } f \cup \text{supp } g \subset \mathcal{O}$. В силу сепарабельности пространства основных функций $\mathcal{S}(R^4)$ множество образующих можно считать счетным.

В заключение автор выражает большую благодарность проф. Д. А. Славнову за постоянное внимание к работе. Автор признателен А. Е. Пухову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики. М., 1968.
2. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris, 1957.
3. Araki H. „J. Math. Phys.“, 1964, 5, 1.
4. Dell'Antonio G. F. „Commun. Math. Phys.“, 1968, 9, 81.
5. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.
6. Завьялов О. И., Сушко В. Н. В кн.: Статистическая физика и квантовая теория поля, под ред. Н. Н. Боголюбова. М., 1973.
7. Хепп К., Эпштейн А. Аналитические свойства амплитуды рассеяния в локальной квантовой теории поля. М., 1971.
8. Nelson E. „Ann. Math.“, 1959, 70, 572.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. М., 1966.

Кафедра
физики высоких энергий

Поступила в редакцию
15.12.77

УДК 539.124:539.292.01

Ф. А. Живописцев, Ф. Э. Комас (Куба)

О ВЛИЯНИИ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРА НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ БЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА В МЕТАЛЛАХ

В предыдущей работе [1] обсуждалось, какое влияние оказывают многочастичные эффекты на процесс неупругого рассеяния быстрого электрона при прохождении через тонкую металлическую пленку. В указанной работе на основе теории Махана—Нозьера—Доминисиса [2—4] показано, что учет взаимодействия в конечном состоянии, когда электрон выбрасывается с атомного уровня на поверхность Ферми, приводит к особенностям в спектре неупруго рассеянных электронов (сингулярное поведение). Характер особенностей в спектре определяется полученным выражением для динамического формфактора (ДФФ) как функции передаваемой энергии ω :

$$S(q, \omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \sum_l A_l |M_l(-q)|^2 \left| \frac{\xi_0}{\omega - \omega_0} \right|^{a_l} \exp \left(-\frac{\omega - \omega_0}{\xi_0} \right) \theta(\omega - \omega_0), \quad (1)$$

где $M_l(-q)$ — коэффициент разложения матричного элемента перехода по парциальным волнам, ξ_0 — фактор обрезания по энергии, ω_0 — энер-