КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.120.1

А. Г. Шумовская, А. С. Шумовский

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА В МОДЕЛИ СТЕНЛИ С ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ

В 1968 г. Г. Стенли [1] было предложено обобщение модели Изинга для случая классического вектора спина с произвольной размерностью D. Такая модель при $D=1$ совпадает с гамильтонианом Изинга, а в пределе $D\to\infty$ переходит в сферическую модель Берлина—Каца. Следует подчеркнуть, что результаты изучения указанных моделей во многом определяют современное состояние теории фазовых переходов и явлений в критической области. Однако существующие точные решения были получены только в простейших случаях: при размерности решетки $d=1$ для $D=1$, а также для $D=2,3$ в нулевом магнитном поле и при $d=2$ только для $D=1$ в нулевом магнитном поле. В то же время, применение метода аппроксимирующих гамильтонианов Боголюбова (мл.) [2] позволяет математически строго исследовать термодинамическое состояние указанных систем в том случае, когда взаимодействие спинов носит характер дальнодействия с интенсивностью, не зависящей от взаимного расположения спинов.

Действительно, рассмотрим модель Стенли с дальнодействием [3], характеризуемую N-частичным гамильтонианом вида

$$H_{\text{мод}}=-\frac{2J}{N}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(S_iS_j)-\mu\sum_{1\leqslant i\leqslant N}(hS_i), \tag{1}$$

где $J=\text{const}$ $(J>0)$, S_i — D-мерный классический вектор, причем $\|S_i\|=\sqrt{D}$, h — внешнее магнитное поле. Выбираемый в соответствии с общим методом [2] аппроксимирующий гамильтониан имеет вид

$$H_{\text{апп}}=JD-\mu(h'_{\text{эфф}}S)+JNC^2, \tag{2}$$

где $h_{\text{эфф}}=h+\frac{2J}{\mu}C$, $C=\frac{1}{N}\langle S\rangle_{\text{апп}}$($\langle\ldots\rangle_{\text{апп}}$— среднее с гамильтонианом (2)) и $S\equiv\sum_{1\leqslant i\leqslant N}S_i$ — вектор суммарного спина.

В рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов для систем (1) и (2) может быть установлено следующее неравенство *

$$0 \leqslant f^{(\text{апп})}(\theta, h) - f_N^{(\text{мод})}(\theta, h) \leqslant \sqrt{J\theta D}\,(\mu\sqrt{N})^{-1}, \tag{3}$$

где θ — температура системы и $f_N^{(\cdot,\cdot)}(\theta, h)$ — плотность свободной энергии соответственно для аппроксимирующей и модельной систем, рассматриваемая как функция температуры и внешнего магнитного поля. Из неравенства (3) следует, что на любом компактном множестве значений температуры и внешнего поля, включающем критическую область, функция $f_N^{(\text{мод})}(\theta, h)$ равномерно сходится к предельному значению $f^{(\text{апп})}(\theta, h)$ в термодинамическом пределе, т. е. системы (1) и (2) определяют одинаковые плотности свободной энергии. Кроме того, из неравенства (3) следует совпадение основных состояний, соответствующих полному упорядочению спинов в системах (1) и (2) при любом значении числа частиц N.

Как известно, классическая модель типа (1) является достаточно хорошим приближением реальной ситуации вблизи критической температуры [5]. Так как оценка (3) не зависит от размерности решетки, ее можно применять для всех трех возможных случаев. Однако наилучшее совпадение с экспериментом наблюдается для $d=3$, что может быть объяснено слабостью эффектов ближнего порядка в трехмерных структурах [6].

Отправляясь от оценки (3), можно установить асимптотическую (при $N\to\infty$) близость и других термодинамических величин, определяемых для модельного и аппроксимирующего гамильтонианов в смысле квазисредних [2]. Иначе говоря, системы (1) и (2) термодинамически эквивалентны, так как определяют одинаковые термодинамические состояния. Отсюда следует вывод о совпадении для них предельных распределений Гиббса. Это последнее обстоятельство открывает возможность для асимптотически точного изучения динамических свойств модели (1). Действительно, в соответствии со стохастическим методом Глаубера [7] вероятность $\rho^{(\text{мод})}(n, t)$ того, что в момент времени t система (1) находится в состоянии с заданной конфигурацией спинов n, удовлетворяет кинетическому уравнению Паули

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(\text{мод})}(n, t) = \sum_m w^{(\text{мод})}(n, m)\,\rho^{(\text{мод})}(m, t), \tag{4}$$

где $w^{\text{мод}}(n, m)$ — вероятность перехода в единицу времени из состояния с конфигурацией спинов m в состояние с конфигурацией спинов n. Аналогичное уравнение может быть записано и в аппроксимирующей системе (2).

Предложенный Глаубером [7] способ определения $w^{(\text{мод})}(n, m)$ заключается в выборе выражения, согласующегося с принципом детального баланса

$$w^{(\text{мод})}(n, m)\,\rho^{(\text{мод})}(m, 0) = w^{(\text{мод})}(m, n)\,\rho^{(\text{мод})}(n, 0) \tag{5}$$

с учетом того обстоятельства, что в момент времени $t=0$ функция $\rho^{(\text{мод})}(m, 0)$ является равновесной функцией распределения в системе (1). В силу сказанного выше при переходе к пределу $N\to\infty$ функция $\rho^{(\text{мод})}(m, 0)$ может быть заменена равновесной функцией распределе-

* Метод доказательства неравенств типа (3) в случае спиновых модельных систем установлен в работе [4].

ния в аппроксимирующей системе, имеющей вид экспоненты, в показателе которой содержится энергия в системе (2), соответствующая рассматриваемой конфигурации спинов m. Тогда условие (5) позволяет явно определить отношение $w^{(\text{мод})}(n, m)/w^{(\text{мод})}(m, n)$.

Отсюда, действуя по аналогии с работами [7, 8] и учитывая то обстоятельство, что в рассматриваемой классической модели ориентации спинов, вообще говоря, распределены в пространстве непрерывно, можно выбрать $w^{(\text{мод})}(n, m)$ в согласующейся с (5) форме

$$w^{(\text{мод})}(\{S_i\}) = \frac{1}{2a}\left[\Gamma(D) - S_i \frac{I_{D/2}\left(\frac{\mu h_{(\text{эфф})}}{\theta}\right)}{I_{D/2-1}\left(\frac{\mu h_{\text{эфф}}}{\theta}\right)}\right],$$

где постоянная a имеет размерность времени и $I_\alpha(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Теперь на основе уравнения (4) можно исследовать динамические свойства в модели (1).

Действительно, например для средней удельной намагниченности

$$< S_i(t) > = \sum S_i \rho^{(\text{мод})}(\{S_i\}, t),$$

где суммирование ведется по всем возможным конфигурациям спинов, из уравнения (4) получаем уравнение движения для параметра порядка в модельной системе (1)

$$a\frac{d}{dt} < S(t) > = - < S(t) > \Gamma(D) + \frac{I_{D/2}(z)}{I_{D/2-1}(z)}, \tag{6}$$

где $z = 2D\theta^{-1}(\mu h + 2J < S(t) >)$. Заметим, что в частном случае $D=1$ уравнение (6) приводит к результатам работы [8]. Подчеркнем, что в настоящей работе уравнение (6) является точным (при $N \to \infty$) уравнением движения для параметра порядка в системе (1), а не приближенным, как в [8].

Действуя аналогичным образом, можно получить уравнения движения типа (6) и для других физических величин в системе (1).

Авторы искренне благодарны проф. Н. Н. Боголюбову (мл.) за научное руководство и поддержку, а также проф. С. В. Пелетминскому и С. Фудзита за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stanley H. E. „Phys. Rev.", 1968, **176**, 781.
2. Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М., 1974.
3. Silver H., Frankel N. E., Ninham B. W. „J. Math. Phys.", 1972, **13**, 468.
4. Бранков И. Г., Шумовский А. С., Загребнов В. А. «Physica», 1974, 78, 183.
5. Stanley H. E., Kaplan T. A. „Phys. Rev. Lett.", 1966, **16**, 981.
6. Jongh L. J. de, Miedema A. R. „Adv. in Phys.", 1974, **23**, 1.
7. Glauber R. J. „J. Math. Phys.", 1963, **4**, 294.
8. Suzuki M., Kubo R. „J. Phys. Soc. Jap.", 1968, **24**, 51.

Кафедра
квантовой статистики

Поступила в редакцию
03.01.78