УДК 533.9

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ, Н. Д. НАУМОВ

ТЕТРАДНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ

В работе [1] было показано, что учет радиационного трения электронов [2] в кинетической теории высокочастотных плазменных колебаний приводит к новому результату для затухания волн в плазме. Этот эффект связан с рассеянием энергии коллективных плазменных колебаний на электронах [3]. Однако использованный в [3] метод расчета не позволяет получить дисперсионное соотношение для релятивистской плазмы в ковариантной форме. Кроме того, ионная компонента плазмы рассматривалась там как компенсирующий фон, и поэтому не рассмотрено влияние радиационного торможения на ионно-звуковые колебания.

В данной статье предлагается ковариантный метод расчета линейных колебаний в релятивистской плазме, основанный на тетрадном формализме [4].

Приведенную в [3] линеаризованную систему кинетических уравнений для случая плазмы, состоящей из частиц нескольких сортов α, можно представить в виде

$$u^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^n} + \frac{r_\alpha}{e_\alpha} \frac{\partial}{\partial u^m} \left\{ f_{\alpha 0} \left(F^{mn} u_n + \frac{2}{3} r_\alpha \frac{\partial F^{mk}}{\partial x^n} u_k u^n \right) \right\} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^{mn}}{\partial x^n} = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int u^m f_\alpha \, d\sigma, \quad \frac{\partial}{\partial x} [{}_n F_{kl}] = 0, \tag{2}$$

где u^m — 4-вектор скорости частиц, F^{mn} — тензор электромагнитного поля, $f_{\alpha 0}$ и f_α — соответственно равновесная функция распределения и ее малое возмущение, $r_\alpha = e_\alpha^2/m_\alpha c^2$, $d\sigma = d^3 u/u^0$; квадратными скобками обозначена операция альтернирования: $A_{[mn]} = A_{mn} - A_{nm}$.

Введем тетраду, т. е. постоянные 4-векторы T_n, X_n, Y_n, Z_n из условий

$$g_{mn} = T_m T_n - X_m X_n - Y_m Y_n - Z_m Z_n,$$

$$T_n T^n \equiv (TT) = -(XX) = -(YY) = -(ZZ) = 1,$$

$$(TX) = (TY) = (TZ) = (XY) = (XZ) = (YZ) = 0, \tag{3}$$

где g_{mn} — метрический тензор Минковского. С помощью (3) любой тензор нетрудно разложить по векторам тетрады. В частности, для 4-скорости u^m и тензора поля F_{mn} будем иметь

$$u^m = WT^m - U_X X^m - U_Y Y^m - U_Z Z^m, \tag{4}$$

$$F_{mn} = E_X T_{[m} X_{n]} + E_Y T_{[m} Y_{n]} + E_Z T_{[m} Z_{n]} + \\ + B_X Z_{[m} Y_{n]} + B_Y X_{[m} Z_{n]} + B_Z Y_{[m} X_{n]}, \tag{5}$$

где, например, $W = (uT)$, $U_X = (uX)$, $E_Y = Y_i T_k F^{ik}$, $B_Z = Y_i X_k F^{ik}$.

Тетрадные компоненты тензоров являются инвариантами. Если известны векторы тетрады для некоторой инерциальной системы отсчета, то по тетрадным компонентам легко найти тензорные компоненты в этой системе отсчета (по формулам типа (4), (5)). Соответствие между системами отсчета и тетрадами можно установить следующим образом. Пусть для системы отсчета K

$$T_n = (1, 0, 0, 0), \; X_n = (0, 1, 0, 0), \; Y_n = (0, 0, 1, 0), \; Z_n = (0, 0, 0, 1). \tag{6}$$

Тогда для системы отсчета K', движущейся относительно K со скоростью $\boldsymbol{v} = \beta c \boldsymbol{n}$

$$\begin{aligned} T_m &= (\gamma, \; \beta\gamma \boldsymbol{n}), \\ X_m &= [\beta\gamma n_x, \; 1 + (\gamma - 1) n_x^2, \; (\gamma - 1) n_x n_y, \; (\gamma - 1) n_x n_z], \\ Y_m &= [\beta\gamma n_y, \; (\gamma - 1) n_y n_z, \; 1 + (\gamma - 1) n_y^2, \; (\gamma - 1) n_y n_z], \\ Z_m &= [\beta\gamma n_z, \; (\gamma - 1) n_z n_x, \; (\gamma - 1) n_z n_y, \; 1 + (\gamma - 1) n_z^2], \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c.$$

Как обычно [5], ищем решение уравнений (1), (2) в виде плоских монохроматических волн, т. е. F^{mn}, $f_\alpha \exp[-i(kx)]$. Тогда в тетрадном представлении исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} (ku) f_\alpha + \frac{2}{3} \frac{r_\alpha^2}{e_\alpha} \left(\varkappa_A E_A W - \frac{\Omega}{c} E_B U_B - e_{ABC} \varkappa_B B_C U_A \right) f_{\alpha 0} + \\ + \frac{r_\alpha}{e_\alpha} \left[i + \frac{2}{3} r_\alpha (ku) \right] \left(E_A U_A \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial W} + W E_B \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial U_B} + \right. \\ \left. + e_{ABC} U_B B_C \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial U_A} \right) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{c} E_A + e_{ABC} \varkappa_B B_C = 4\pi i \sum_\alpha e_\alpha \int U_A f_\alpha d\sigma, \quad B_A = \frac{c}{\Omega} e_{ABC} \varkappa_B E_C, \\ \varkappa_A E_A = -4\pi i \sum_\alpha e_\alpha \int W f_\alpha d\sigma, \quad \varkappa_A B_A = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где индексы A, B, C пробегают значения X, Y, Z, e_{ABC} — совершенно антисимметричный тензор Леви—Чивиты, Ω/c, $\varkappa_A$ — тетрадные компоненты волнового вектора

$$\Omega = c(kT), \; \varkappa_X = (kX), \; \varkappa_Y = (kY), \; \varkappa_Z = (kZ). \tag{10}$$

Систему уравнений (8), (9) можно привести к виду

$$D_{AB} E_B = \left[\frac{c^2}{\Omega^2} \left(\varkappa_A \varkappa_B - \varkappa^2 \delta_{AB} \right) + \varepsilon_{AB} \right] E_B = 0, \tag{11}$$

где

$$\varkappa^2 = \varkappa_A \varkappa_A,$$

$$\varepsilon_{AB} = \delta_{AB} - \frac{8\pi}{3} i \frac{c^2}{\Omega^2} \sum_\alpha r_\alpha^2 \int U_A \left[\frac{(kk)}{(ku)} U_B - \varkappa_B\right] f_{\alpha 0} d\sigma +$$

$$+ 4\pi \frac{c^2}{\Omega^2} \sum_\alpha r_\alpha \left[\frac{1}{(ku)} - \frac{2}{3} i r_\alpha\right] \int U_A \left[k^n \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u^n} U_B + (ku) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial U_B}\right] d\sigma \quad (12)$$

тетрадные компоненты тензора высокочастотной диэлектрической проницаемости. Дисперсионное уравнение для плазменных колебаний имеет вид

$$D(\varkappa_A, \Omega) = \det \| D_{AB} \| = 0. \quad (13)$$

Ковариантные соотношения (11)—(13) определяют поведение плоских электромагнитных волн в релятивистской плазме с учетом радиационного трения, невозмущенное состояние которой задано функцией распределения $f_{\alpha 0}$.

Эти соотношения упрощаются для изотропных в пространстве скоростей распределений $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(\eta)$, $\eta = \varepsilon_\alpha / \theta_\alpha$, где ε_α — энергия частицы сорта α, θ_α — температура. В этом случае для продольных и поперечных волн в однородной релятивистской плазме получим из (13) соответственно

$$1 + 4\pi \frac{c}{\varkappa} \sum_\alpha a_\alpha r_\alpha \int\limits_{-c}^{c} \frac{w G_\alpha dw}{\Omega - \varkappa w} - \frac{8\pi}{3} i \frac{c^2 (kk)}{\varkappa \Omega} \sum_\alpha r_\alpha^2 \int\limits_{-c}^{c} \frac{w F_\alpha dw}{\Omega - \varkappa w} -$$

$$- \frac{8\pi}{3} i \frac{c}{\Omega} \sum_\alpha a_\alpha r_\alpha^2 \int U_\parallel^2 f'_{\alpha 0} d\sigma = 0, \quad (14)$$

$$1 + 2\pi \frac{\Omega}{c (kk)} \sum_\alpha a_\alpha r_\alpha \int \frac{U_\perp^2}{(ku)} f'_{\alpha 0} d\sigma - \frac{4\pi}{3} i \sum_\alpha r_\alpha^2 \int \frac{U_\perp^2}{(ku)} f_{\alpha 0} d\sigma -$$

$$- \frac{4\pi}{3} i \frac{\Omega}{c (kk)} \sum_\alpha a_\alpha r_\alpha^2 \int U_\perp^2 f'_{\alpha 0} d\sigma = 0. \quad (15)$$

Здесь $a_\alpha = m_\alpha c^2/\theta_\alpha$, $f'_{\alpha 0} = \dfrac{d f_{\alpha 0}}{d\eta}$, $U_\parallel = (\varkappa_A U_A)/\varkappa$, $U_\perp^2 = U_A U_A - U_\parallel^2$,

$$F_\alpha = \frac{\pi}{c^3} \int\limits_0^{\sqrt{c^2 - w^2}} f_{\alpha 0} (1 - V^2/c^2)^{-5/2} d V_\perp^2, \quad G_\alpha = \frac{\pi}{c^3} \int\limits_0^{\sqrt{c^2 - w^2}} f'_{\alpha 0} (1 - V^2/c^2)^{-5/2} d V_\perp^2 .$$

Интегралы в (14) следует вычислять по контуру Ландау.

Пусть в системе отсчета K, в которой плазма неподвижна, равновесное состояние плазмы описывается релятивистским распределением Максвелла, т. е.

$$f_{\alpha 0} = \frac{n_\alpha a_\alpha}{4\pi K_2(a_\alpha)} \exp\{- a_\alpha \sqrt{1 + U^2}\},$$

где n_α — инвариантная плотность частиц сорта α, $K_2(a_\alpha)$ — функция Макдональда. В этом случае

$$F_\alpha = - G_\alpha = \frac{n_\alpha}{c} \varphi_\alpha(\xi), \quad \varphi_\alpha(\xi) = [1 + (a_\alpha \xi + 1)^2] \frac{\exp\{- a_\alpha \xi\}}{2 a_\alpha^2 K_2(a_\alpha)},$$

$$\xi = (1 - w^2/c^2)^{-1/2}.$$

Для почти действительных собственных частот $\Omega=\Omega_r+i\Omega_i$ интегралы по скоростям в (14), (15) можно разложить в ряд Тейлора вблизи $\Omega_i=0$. Тогда для поперечных электромагнитных волн в приближении, когда фазовая скорость волны значительно больше тепловой скорости электронов, из (15) найдем

$$\Omega_r^2=\varkappa^2 c^2+(R+Q/a_e)\,\Omega_p^2, \tag{16}$$

$$\Omega_i=-\delta=-\frac{e^2}{3m_e c^3}\,\Omega_p^2\,, \tag{17}$$

где

$$\Omega_p^2=4\pi n_e e^2/m_e,\quad R=\frac{a_e^2}{K_2(a_e)}\int\limits_{a_e}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,K_2(x)\,dx\,,$$

$$Q=\frac{a_e}{2}\left[1-\frac{a_e}{R}+\frac{a_e^4}{R\,K_2(a_e)}\int\limits_{a_e}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,K_3(x)\,dx\right].$$

Как и в работе [3], из формул (16), (17) следует, что поперечные волны в плазме затухают с декрементом (17), причем радиационное затухание поперечных волн является единственным. Однако при выводе (16) и (17), в отличие от [3], не использовалось разложение релятивистского распределения Максвелла в ряд по V/c, и поэтому полученное здесь дисперсионное соотношение является более общим.

Естественно, в системе отсчета K, которой соответствует тетрада (6), тетрадные компоненты совпадают с тензорными. Используя свойство инвариантности тетрадных компонент, нетрудно получить дисперсионное соотношение в системе K'. В частности, считая, что в системе K волна распространяется вдоль оси x, для поперечных волн получим

$$\omega_r^2=k^2c^2+\tilde{R}\,\Omega_p^2\,, \tag{18}$$

$$\omega_i=-\delta\left[\left(X_0-\frac{c}{\omega_r}\,\boldsymbol{kX}\right)^2+\tilde{R}\,\Omega_p^2/\omega_r^2\right]^{1/2}, \tag{19}$$

где X_0, $\boldsymbol{X}$ определены в (7); в явном виде через скорость $\boldsymbol{v}$ системы K' имеем

$$X_0=\gamma\,v_x/c,\quad \boldsymbol{kX}=k_x+(\gamma-1)\,\frac{v_x}{v^2}\,\boldsymbol{kv};\quad \tilde{R}=R+Q/a_e.$$

Для высокочастотных ленгмюровских колебаний плазмы из (14) при условии $\Omega/\varkappa\gg V_{te}$ получим

$$\Omega_r^2=\Omega_p^2[R+3Q\,\varkappa^2\lambda_D^2], \tag{20}$$

$$\Omega_i=-\gamma-\delta,\quad \delta=\frac{e^2}{3\,m_e c^3}\,\Omega_p^2\,[1-\varkappa^2\lambda_D^2(3Q/R-1)]\,, \tag{21}$$

$$\gamma=\frac{\pi R}{2\sqrt{a_e}}\;\frac{\Omega_p}{\varkappa^3\lambda_D^3}\,\varphi_e(\chi),\quad \chi=\left[1-\frac{R}{a_e\varkappa^2\lambda_D^2}-3Q/a_e\right]^{-1/2}. \tag{22}$$

Здесь $\lambda_D=\dfrac{\theta_e}{4\pi n_e e^2}$.

Формулы (20)—(22) представляют зависимость частоты ленгмюровских колебаний от волнового вектора, а также декременты радиационного затухания и затухания Ландау для релятивистской плазмы. В приближении малых скоростей эти формулы переходят в выражения, найденные в работе [3].

Соотношение между временем радиационного затухания $\tau_\delta = 1/\delta$ и временем затухания Ландау $\tau_\gamma = 1/\gamma$ в единицах $2\pi/\Omega_p$ для электронной компоненты плазмы изображено графически на рисунке. Кривые *1—3* соответствуют радиационному затуханию при плотностях электронов 10^{10}, 10^{12}, 10^{14} см$^{-3}$ соответственно. Кривая *4* относится к затуханию Ландау. Так как $\varkappa\lambda_D = V_{te}/V_\Phi$, то из рисунка видно, что радиационное затухание является преобладающим при фазовых скоростях волн, по крайней мере, на порядок больших тепловой скорости электронов.

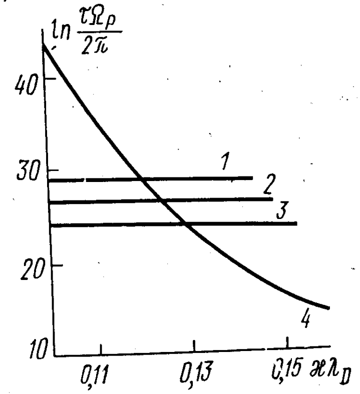

Рис.

В заключение приведем результаты для ионно-звуковых колебаний.

При $\theta_e \gg \theta_i$ и $V_{ti} \ll V_\Phi/V_{te}$ получим

$$\Omega_r^2 = \varkappa^2 (S V_S^2 + 3\theta_i/m_i), \tag{23}$$

$$\Omega_i = -\gamma_e - \gamma_i - \delta_e - \delta_i, \quad \gamma_e = \frac{\pi\varkappa}{2c} S^2 V_S^2 \varphi_e(1), \tag{24}$$

$$\gamma_i = \varkappa V_S \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\theta_e}{\theta_i}\right)^{\frac{3}{2}} S^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\theta_e}{\theta_i} S\right\}, \tag{25}$$

$$\delta_e = \frac{(e\varkappa S V_S)^2}{3m_e a_e c^3}, \quad \delta_i = \frac{(e\varkappa V_S)^2}{3m_i c^3}[S - 2\theta_i/\theta_e]. \tag{26}$$

Здесь $V_S = \sqrt{\theta_e/m_i}$ — ионно-звуковая скорость, $S = (1+\varkappa^2\lambda_D^2)^{-1}$. Из полученных формул видно, что затухание ионного звука, обусловленное поглощением ионно-звуковых колебаний резонансными электронами (24), и затухание, обусловленное поглощением резонансными ионами (25), являются преобладающими по сравнению с радиационным затуханием (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1978, **19**, № 1, с. 65.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
3. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1978, **19**, № 3, с. 95.
4. Наумов Н. Д. «Изв. вузов. Физика», 1978, № 1, с. 70.
5. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. М., 1974.

Кафедра
теоретической физики

Поступила в редакцию
11.01.78