

Н. И. УСЮКИНА

## О ГЛУБОКОНЕУПРУГОЙ АСИМПТОТИКЕ ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ ЛИНИЯМИ

В настоящей статье рассматривается глубоконеупругая асимптотика ряда неплоских фейнмановских диаграмм с перекрестными линиями в  $t$ -канале в скалярной  $\lambda\phi^3$ -теории.

Теория возмущений на всех этапах развития полевой науки служила своеобразной теоретической лабораторией, в рамках которой апробировались, а зачастую и предсказывались многие положения, закладываемые затем в основу различных феноменологических схем. Так, например, рассмотрение моделей перерасеяния в рамках стандартной теории возмущений привело к открытию движущихся ветвлений в плоскости комплексного момента [1], а суммирование «nest»-графов теории возмущений [2] послужило основой реджеонных эйкональных моделей.

Идеи скайлинга, исследование глубоконеупругих процессов и инклюзивных спектров поставили ряд проблем перед теорией возмущений. При этом, если иметь в виду рассмотрение моделей перерасеяния в глубоконеупругой области, с необходимостью встает задача исследования глубоконеупругих асимптотик неплоских фейнмановских графов в теории возмущений. Рассмотрение глубоконеупругих асимптотик фейнмановских диаграмм с перекрестными линиями в  $t$ -канале является первым необходимым этапом в решении этой задачи.

Ввиду наличия двух асимптотических каналов  $k^2 \rightarrow \infty$ ,  $-2kr \rightarrow \infty$ , вычисление асимптотики в глубоконеупругой области становится несколько более сложным по сравнению с вычислением асимптотики в области рассеяния при  $s \rightarrow \infty$ ,  $t_{\text{фикс}}$ . Очевидно, что стандартная техника исследования асимптотических свойств графов теории возмущений в рамках фейнмановской или судаковской параметризации труднопереносима на рассмотрение глубоконеупругих асимптотик неплоских графов. Пример лестничных графов [3] показывает, что наиболее удобно работать в глубоконеупругой области в координатном представлении и исследовать асимптотику соответствующих диаграмм на световом конусе.

Мы будем интересоваться в основном областью малых значений скайлинговой переменной  $1/\omega = -k^2/2kr$ . Область малых  $1/\omega$  интересна с той точки зрения, что здесь естественно ожидать сходства глубоконеупругих и чисто адронных процессов, причём предел  $1/\omega \rightarrow 0$  приводит к хорошо изученным асимптотикам соответствующих фейнмановских графов при  $s \rightarrow \infty$ ,  $t=0$ . С другой стороны, при рассмотрении феноменологических моделей перерасеяния в глубоконеупругой области так называемое «слияние партонных лесенок» наиболее существенно в области именно малых значений  $1/\omega$  (см., например, [4] и цитированную там литературу).

1. Для иллюстрации метода вычисления рассмотрим сначала глубоконеупругую асимптотику простейшего графа с перекрестными линиями типа изображенного на рис. 1. Как известно, глубоконеупругая

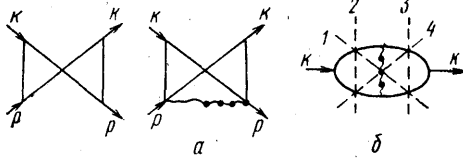


Рис. 1

Рис. 2 (а, б)

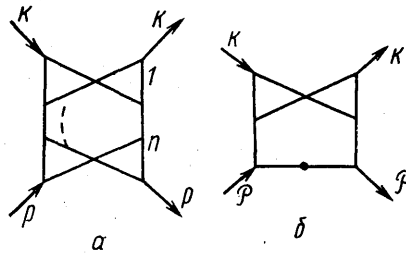


Рис. 3 (а, б)

асимптотика этого графа отвечает области  $k^2 \rightarrow \infty$ ,  $-2kp \rightarrow \infty$ ,  $-k^2/2kp = 1/\omega = \text{const}$ . Используя хорошо известный факт [5], что фурье-образ (нормировочные множители здесь и далее опускаются)

$$F \left\{ \frac{1}{(-k^2 + m^2 + i\varepsilon)^2} \right\} \Big|_{x^2 \rightarrow 0} \rightarrow \ln(x^2 + i\varepsilon),$$

для асимптотики этого графа на конусе получаем следующее выражение:

$$\int_0^1 dz \int_0^1 d\bar{z} e^{ip(x-y)(z-\bar{z})} \ln^2(x^2 + i\varepsilon). \quad (1)$$

Нетрудно показать, что в области малых значений скайлинговой переменной  $1/\omega$  этот интеграл приводится к виду

$$\int_{-1}^1 d\tau e^{ip(x-y)\tau} \ln^2(x^2 + i\varepsilon); \quad (2)$$

соответственно в импульсном представлении

$$\int_{-1}^1 d\tau \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta \{(k + p\tau)^2 + \zeta\}^2}. \quad (3)$$

2. Рассмотрим теперь глубоконеупругую асимптотику диаграммы на рис. 2, а. Для демонстрации метода вычисления рассмотрим сначала асимптотику этой диаграммы для случая  $p=0$ . В этом случае диаграмма рис. 2, а превращается в петлевую диаграмму рис. 2, б. Асимптотика этой петлевой диаграммы при  $k^2 \rightarrow \infty$  может быть вычислена разными способами. Например, в импульсном представлении можно, как это делал в свое время Челлен [6] при вычислении поправок к поляризации вакуума в электродинамике, вычислить вклады в мнимую часть амплитуды, которые соответствуют четырем разрезам этой диаграммы, представленным на рис. 2, б. При этом главные асимптотики, соответствующие вкладам от разрезов 1 и 2 (соответственно 3 и 4), взаимно компенсируются. Однако в случае, когда волнистой линии соответствует повторный пропагатор (это указано на рис. 2, б соответственно точками), асимптотику наиболее легко вычислять в координатном представлении, где асимптотике диаграммы соответствует главная особенность этой диаграммы на световом конусе  $(x-y)^2 \rightarrow 0$ .

Используя координатное представление для функции Грина (нормировочные множители опущены)

$$G(x, m^2) = \int_0^\infty da e^{i \frac{m^2}{4a} + i x^2 a}, \quad (4)$$

асимптотику свертки при  $(x-y)^2 \rightarrow 0$ ,  $(x-n)^2 \rightarrow 0$ ,  $(y-n)^2 \rightarrow 0$

$$\int d\xi G((x-\xi)^2) G((\xi-y)^2) \frac{\partial^3}{\partial(\mu^2)^3} G((\xi-\eta)^2, \mu^2) \quad (5)$$

сводим к асимптотике следующего интеграла:

$$\frac{\partial^3}{\partial(\mu^2)^3} \int_0^\infty d\lambda \int \prod da_i \delta(1 - \Sigma a_i) e^{i \frac{\mu^2}{a_3 \lambda} e^{i(x-y)^2 \lambda a_1 a_2 + i(y-\eta)^2 \lambda a_2 a_3 + i(x-\eta)^2 \lambda a_1 a_3}} \quad (6)$$

Очевидно, что в этом выражении можно сразу перейти к пределу  $(x-\eta)^2=0$ ,  $(y-\eta)^2=0$ , а для предела  $(x-y)^2 \rightarrow 0$  используем следующее меллиновское разложение:

$$\begin{aligned} & \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da \Gamma(a)}{\{(x-y)^2\}^a} \int \prod da_i \delta(1 - \Sigma a_i) (a_1 a_2)^{-a} a_3^{a-1} \int_0^\infty d\lambda e^{i \frac{\mu^2}{\lambda} \lambda^a} \sim \\ & \sim \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da}{a^2 \{(x-y)^2\}^a (\mu^2)^{2+a}} \sim \frac{1}{(\mu^2)^2} \ln\{(x-y)^2\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Соответственно на конусе свертки

$$\int d\eta G((x-\eta)^2) G((\eta-y)^2) \sim \ln((x-y)^2). \quad (8)$$

Таким образом, для петлевой диаграммы рис. 2, б приходим к асимптотике на конусе типа

$$\frac{1}{(\mu^2)^2} \ln^2((x-y)^2 + i\epsilon), \quad (9)$$

т. е. в импульсном представлении (см. таблицы перевода из координатного представления в импульсное в [5]) при  $s \rightarrow \infty$  диаграмма рис. 2, б ведет себя как

$$\frac{1}{(\mu^2)^2} \frac{1}{s^2} \ln s.$$

При вычислении асимптотики диаграммы рис. 2, *a* в глубококонепругой области методика вычисления изменяется самым незначительным образом. Так, свертка (5) заменется на свертку вида

$$\int d\xi G((x - \xi)^2) G((\xi - y)^2) \frac{\partial^3}{\partial(\mu^2)^3} G((\xi - \eta)^2, \mu^2) e^{-ip\xi}.$$

Тогда на конусе вместо (7) получаем следующее меллиновское разложение:

$$\int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} \frac{da}{a} \int \frac{\text{Pd}\alpha_i \delta(1 - \Sigma\alpha_i) \alpha_3^{a-1} (\alpha_1\alpha_2)^{-a}}{\{(x - y)^2\}^a (\mu^2)^{2+a}} e^{-p x \alpha_1 - i p y \alpha_2 - i p \eta \alpha_3}.$$

Далее, вместо свертки (8) имеем выражение

$$\int d\eta e^{ip(1-\alpha_3)\eta} G((x - \eta)^2) G((\eta - y)^2) \sim \ln \{(x - y)^2 + i\varepsilon\} \int d\bar{z} e^{ip(1-\alpha_3)(\bar{z}_1 x - \bar{z}_2 y)}.$$

Таким образом, для диаграммы рис. 2, *a* на конусе приходим к выражению вида

$$\int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} \frac{da \ln \{(x - y)^2 + i\varepsilon\}}{a \{(x - y)^2 + i\varepsilon\}^a (\mu^2)^{2+a}} \int_0^1 d\alpha \alpha^{a-1} (1 - \alpha)^{1-2a} \times \\ \times \int_0^1 dz \int_0^1 d\bar{z} (\bar{z}_1 \bar{z}_2)^{-a} e^{-ip(x-y)(z - \bar{z})(1-\alpha)}.$$

Выполняя далее переход, аналогичный переходу от (1) к (2), делая замену  $\tau(1-\alpha) \rightarrow \tau$ , вычисляя затем интеграл по  $\alpha$  и беря вычет в полюсе подынтегрального выражения при  $a=0$ , получаем для диаграммы рис. 2, *a* в области малых  $1/\omega$  асимптотику на конусе следующего вида:

$$\frac{1}{(\mu^2)^2} \ln^2 \{(x - y)^2 + i\varepsilon\} \int_{-1}^1 d\tau e^{ip(x-y)\tau}. \quad (10)$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению диаграммы типа рис. 3, *a* при  $n=2$ , т. е. диаграммы с первой итерацией перекрестного графа в  $t$ -канале. Используя (10) и (3), сводим рассмотрение глубококонепругой асимптотики этого графа к рассмотрению асимптотики графа рис. 3, *b*, где  $\mathcal{F} = p\tau$ ,

$$A_{3a}(k, p) = \int_{-1}^1 d\tau \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta} A_{3b}(k, p\tau, \zeta). \quad (11)$$

Далее, вычисление асимптотики графа рис. 3, *b* сводится к вычислению асимптотики графа рис. 2, *a*

$$A_{3b}(k, \mathcal{F}, \zeta) = \int_0^1 dx x A_{2a}(k, \mathcal{F}x, M^2(x)),$$

$$M^2(x) = \zeta x + \mu^2(1 - x).$$

Таким образом,

$$A_{3a}(k, p) = \int_{-1}^1 d\tau \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \int_0^1 dx x A_{2a}(k, p\tau x, M^2(x)).$$

В области малых  $1/\omega$  в результате простой замены получаем для этого выражения

$$\frac{1}{m^2 \mu^2} \int_{-1}^1 d\tau_1 \int_{-1}^1 d\tau_2 \int_{m^2 \xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi \{(k + p\tau_1 \tau_2)^2 + \xi^2\}}. \quad (12)$$

И наконец, для диаграммы с  $n$  простыми блоками ( $n \geq 2$ ) типа рис. 1, а имеем представление

$$T_n = \frac{1}{(m^2 \mu^2)^{n-1}} \int_{-1}^1 d\tau_1 \dots \int_{-1}^1 d\tau_n \int_{m^2 \xi}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi \{(k + p\tau_1 \dots \tau_n)^2 + \xi^2\}}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть далее, что из этого выражения для мнимой части амплитуды с  $n+2$  простыми блоками ( $n \geq 0$ ) типа рис. 1, а в глубоко-неупругой области следует представление

$$T_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{m^2 (\mu^2 m^2)^{n+1}} \frac{1}{2kp} \frac{\ln^n |\omega|}{n!} \{\theta(\omega) + \theta(-\omega)\}, \quad (14)$$

из которого, в частности, вытекает известная асимптотика в области рассеяния при  $s \rightarrow \infty$ ,  $k^2 \sim m^2$ ,  $t=0$ , обусловленная так называемыми «пинчевыми особенностями» [7],

$$A_{n+2} = \frac{2^{n+1} i\pi}{m^2 (\mu^2 m^2)^{n+1}} \frac{1}{s} \frac{\ln^n s}{n!}. \quad (15)$$

Суммируя по числу блоков от  $n=0$  до  $n=\infty$  из (14) получаем в области малых значений скайлинговой переменной степенное поведение по скайлинговой переменной мнимой части амплитуды рассеяния:

$$T = \frac{2}{m^4 \mu^2} \frac{1}{2kp} \{\theta(\omega) + \theta(-\omega)\} \omega^{\beta(m^2)}. \quad (16)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelstam S. „Nuovo Cim.“, 1963, 30, 1113, 1127, 1143; Polkinghorne J. C. „J. Math. Phys.“, 1963, 4, 1396.
2. Hasslacher B., Sinclair D. K. „Phys. Rev.“, 1971, D 3, 1770.
3. Усюкина Н. И. «Теор. и мат. физика», 1973, 17, 359.
4. Захаров В. И., Николаев Н. Н. «Ядерная физика», 1975, 21, 434.
5. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 1. М., 1958.
6. Källen G., Sabry A. „Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd.“, 1955, 29, N 17.
7. Tiktopoulos G. „Phys. Rev.“, 1963, 131, 2373; Polkinghorne J. C. „J. Math. Phys.“, 1963, 4, 1396.