УДК 539.12.01

В. И. ГРИГОРЬЕВ

НЕРЕЗОНАНСНЫЕ МАКСИМУМЫ ДЛЯ МНОГОБОЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Постановка задачи, обсуждаемой в настоящей заметке, такова: на «мишень» падает N бозонов; оценить наиболее вероятное число из них, которые при этом поглощаются, или (это — различные задачи) испытывают упругое или неупругое рассеяние. При этом внимание фиксируется не на особенностях «мишени», в том числе, в первую очередь, не на возможности существования у нее резонансных свойств, а на чисто кинематических эффектах, т. е. эффектах, в конечном итоге сводящихся к статистике бозонов. Оказывается, что такого рода эффекты приводят к возникновению максимумов для распределения вероятностей поглощения, упругого и неупругого рассеяния различного числа бозонов «мишенью»; эти максимумы естественно называть нерезонансными, чтобы подчеркнуть их кинематическую природу.

Интерес к многобозонным (а конкретно — к многофотонным) процессам проявился хотя бы в появлении значительного числа работ (например, [1]—[10]), посвященных рассмотрению эффектов в сильных световых полях. При этом интенсивная электромагнитная волна описывалась чаще всего как классическая, а квантовые эффекты рассматривались при исследовании движения заряженных частиц в поле этой волны и — на уровне теории возмущений — при подсчете вероятностей поглощения, рассеяния и т. д. отдельных квантов.

При таком рассмотрении, безусловно интересном и плодотворном, остаются, однако, в тени такие вопросы: 1) в какой мере получаемые выводы относятся не только к фотонам, но и к другим бозонам; 2) какие эффекты выпадают из рассмотрения, если описывать поток бозонов (конкретно — фотонов) как классическую волну.

Попытка такого рода рассмотрения была (для задачи о поглощении) предпринята в [11]. Было, в частности, установлено, что кинематические нерезонансные максимумы проявляются тем более явственно, чем более «похожими» являются все N падающих на «мишень» бозонов. Поэтому в дальнейшем, дабы оценить максимальный эффект, основное внимание будет обращено на начальные состояния с тождественными бозонами:

$$\Psi^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N!}}\,\bar{g}\,(F^{(+)})^N\,|0\rangle. \tag{1}$$

Здесь $\bar{g}$ — оператор порождения, относящийся к «мишени», а

$$F^{(+)} \equiv \int d^3k f(\mathbf{k})\, a^{(+)}(\mathbf{k}), \tag{2}$$

где $f(\mathbf{k})$ — «пакетная функция», определяющая форму (одинаковую!) падающих на «мишень» бозонных пакетов, а $a^{(+)}(\mathbf{k})$ — оператор порождения бозона; для наших целей достаточно рассмотреть бесспиновые бозоны, так что правила перестановок имеют вид $[a^{(-)}(\mathbf{k}), a^{(+)}(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$.

Чтобы $\Psi^{(N)}$ было нормировано на единицу, должно выполняться равенство:

$$\langle 0 | F^{(-)} F^{(+)} | 0 \rangle = \int d^3k \, | f(\mathbf{k}) |^2 = 1. \tag{3}$$

Обозначим матрицу, описывающую поглощение «мишенью» n и испускание ею l бозонов, знаком $U_{(n,l)}$; эту матрицу можно представить в виде:

$$U_{(n,l)} = \sum_{\alpha,\beta} \bar{g}_\alpha g_\beta \int d^3k_1 \ldots d^3k_n d^3k_1' \ldots d^3k_l' \prod_{i=1}^{l} a^{(+)}(\mathbf{k}_i') \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} a^{(-)}(\mathbf{k}_j) \, G_{(n,l)}(\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_1' \ldots \mathbf{k}_l'). \tag{4}$$

Индексы α и β, по всем возможным значениям которых ведется суммирование, обозначают различные состояния «мишени». Правила перестановки для g_α таковы: $[g_\alpha, \bar{g}_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$.

Для дальнейших оценок необходима определенная конкретизация коэффициентных функций $G_{(n,l)}(\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_l')$. Однако для анализа кинематических максимумов достаточны лишь частичные ограничения на вид этих функций. Проиллюстрируем это на примерах.

Прежде всего запишем выражение для вероятности поглощения одного бозона $w_{(1,0)}^{(N)}$ (при условии, что число начальных бозонов равно N):

$$w_{(1,0)}^{(N)} = \Psi^{(N)+} U_{(1,0)}^{+} U_{(1,0)} \Psi^{(N)} =$$

$$= \frac{1}{N!} \langle 0 | (F^{(-)})^N \int d^3q a^{(+)}(\mathbf{q}) G_{(1,0)}^{*}(\mathbf{q}) \int d^3k a^{(-)}(\mathbf{k}) G_{(1,0)}(\mathbf{k}) (F^{(+)})^N | 0 \rangle =$$

$$= N w_{(1,0)}^{(1)}. \tag{5}$$

Появляющаяся в (5) вероятность $w_{(1,0)}^{(1)}$ поглощения одного падающего на «мишень» бозона, очевидно, равна:

$$w_{(1,0)}^{(1)} = \left| \int d^3k G_{(1,0)}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \right|^2. \tag{6}$$

То обстоятельство, что $w_{(1,0)}^{(N)} = N w_{(1,0)}^{(1)}$ физически вполне очевидно: если на «мишень» падает N бозонов, то вероятность поглощения одного из них в N раз больше, чем при падении одного бозона.

Менее очевидна оценка, относящаяся к поглощению n бозонов. Вероятность такого процесса $w_{(n,0)}^{(N)}$ равна:

$$w_{(n,0)}^{(N)} = \Psi^{(N)+} U_{(n,0)}^{+} U_{(n,0)} \Psi^{(N)} =$$

$$= \frac{1}{N!} \langle 0 | (F^{(-)})^N \int d^3k_1 \ldots d^3k_n \prod_{i=1}^{n} a^{(+)}(\mathbf{k}_i) \, G_{(n,0)}^{*}(\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n) \times$$

$$\times \int d^3q_1 \ldots d^3q_n \prod_{j=1}^{n} a^{(-)}(\mathbf{q}_j) \, G_{(n,0)}(\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_n) (F^{(+)})^N | 0 \rangle. \tag{7}$$

Предположим, что все n процессов поглощения бозонов «мишенью» можно рассматривать как независимые; такое предположение оправдано, если при поглощении бозонов не происходит существенного изменения состояния «мишени», что, в частности, предполагает отсутствие резонансных эффектов, о чем уже говорилось выше.

При таком предположении коэффициентная функция $G_{(n.0)}(\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_n)$ факторизуется:

$$G_{(n.0)}(\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_n) \Rightarrow \frac{1}{n!} G_{(1.0)}(\mathbf{q}_1) \ldots G_{(1.0)}(\mathbf{q}_n). \tag{8}$$

Появление множителя $1/n!$ можно пояснить, например, обращаясь к модели классических токов (см., например, [12]), в которой все акты поглощения заведомо выступают как независимые. Здесь, однако, уместно отметить, что конкретный выбор модели, определяющий вид $G_{(1.0)}(\mathbf{q})$, не является для нас решающим; важнее всего именно независимость актов поглощения. Поэтому для оценок можно использовать хотя бы даже и низшее неисчезающее приближение теории возмущений, в рамках которого также нетрудно обосновать появление множителя $1/n!$ в (8).

При указанном в (8) разбиении $G_{(n.0)}$ на множители, $w^{(N)}_{(n.0)}$ принимает вид:

$$w^{(N)}_{(n.0)} = \frac{N!}{(N-n)!\, n!\, n!} \left(w^{(1)}_{(1.0)}\right)^n. \tag{9}$$

По мере увеличения n эта величина вначале возрастает, затем проходит через максимум при некотором $n = n_{\max}$ и далее падает. Поэтому при $n = n_{\max}$ должно выполняться условие $w^{(N)}_{(n.0)} \approx w^{(N)}_{(n+1.0)}$, приводящее к уравнению для нахождения $n_{\max}$:

$$(N - n_{\max})\, w^{(1)}_{(1.0)} \approx (n_{\max} + 1)^2.$$

Поскольку $N \gg n_{\max} \gg 1$, можно записать:

$$n_{\max} \approx \sqrt{N w^{(1)}_{(1.0)}}. \tag{10}$$

Конечно, этой оценкой можно пользоваться лишь при $N w^{(1)}_{(1.0)} > 1$.

Перейдем теперь к обсуждению задачи о рассеянии. Здесь также прежде всего уместно выписать выражение для вероятности рассеяния одного из N падающих на «мишень» бозонов $w^{(N)}_{(1.1)}$:

$$w^{(N)}_{(1.1)} = \Psi^{(N)+} U^{+}_{(1.1)} U_{(1.1)} \Psi^{N} =$$

$$= \frac{1}{N!} \langle 0 | (F^{(-)})^N \int d^3k d^3k' a^{(+)}(\mathbf{k}')\, a^{(-)}(\mathbf{k})\, G^{*}_{(1.1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \times$$

$$\times \int d^3p d^3p' G_{(1.1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, (F^{(+)})^N | 0 \rangle =$$

$$= N \left\{ \int d^3k d^3p d^3q f^{*}(\mathbf{k})\, G^{*}_{(1.1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k})\, G_{(1.1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, f(\mathbf{q}) + \right.$$

$$\left. + (N-1) \int d^3k d^3k' d^3p d^3p' f^{*}(\mathbf{p})\, f^{*}(\mathbf{k}')\, G^{*}_{(1.1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, G_{(1.1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, f(\mathbf{p}')\, f(\mathbf{k}). \right. \tag{11}$$

Первый из членов в правой части (11) может быть представлен в виде $Nw^{(1)}_{(1.1)}$, где, в соответствии с принятыми обозначениями, $w^{(1)}_{(1.1)}$ есть вероятность рассеяния единичного бозона:

$$w^{(1)}_{(1.1)} = \Psi^{(1)+} U^{+}_{(1.1)} U_{(1.1)} \Psi^{(1)} =$$
$$= \int d^3k d^3p d^3q f^* (\mathbf{k}) G^*_{(1.1)} (\mathbf{p}, \mathbf{k}) G_{(1.1)} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) f (\mathbf{q}). \qquad (12)$$

Второй член в (11) дает заметный вклад только в том случае, когда начальные бозонные пакеты являются очень «узкими», т. е. на «мишень» падают почти монохроматические волны, причем именно той частоты, при которой имеет место «δ-образный», т. е. весьма узкий и ярко выраженный резонансный максимум в рассеянии.

Поскольку нашей целью является лишь обсуждение кинематических нерезонансных максимумов, естественно обратиться к таким физическим условиям, в которых резонансные эффекты в рассеянии несущественны, что дает основание ограничиться в (11) одним лишь первым членом. При этом мы приходим к простой и естественной оценке:

$$w^{(N)}_{(1.1)} = Nw^{(1)}_{(1.1)}, \qquad (13)$$

показывающей, что вероятность однократного рассеяния пропорциональна числу падающих на мишень частиц.

Перейдем теперь к обсуждению n-кратного рассеяния. Этот процесс описывается матрицей $U_{(n.n)}$. Однако здесь необходима дополнительная детализация: из всех процессов, описываемых матрицей $U_{(n.n)}$, нас будет интересовать только тот, который заключается в однократном рассеянии n бозонов из общего числа N, падающих на «мишень». Более того, представляется интересным обсуждение того случая, когда все такие акты однократного рассеяния можно считать независимыми — именно в таких условиях наиболее просто и отчетливо проявляется нерезонансный максимум в рассеянии. При таких ограничениях коэффициентную функцию $G_{(n.n)}(\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n, \mathbf{k}'_1 \ldots \mathbf{k}'_n)$ для поглощения и испускания n бозонов можно представить в виде:

$$G_{(n.n)} (\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n, \mathbf{k}'_1 \ldots \mathbf{k}'_n) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} G_{(1.1)} (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i), \qquad (14)$$

причем появление множителя $1/n!$, имеющего «комбинаторное» происхождение, можно пояснить теми же методами, которые обсуждались выше. Вероятность n независимых актов рассеяния, если учесть (14), принимает вид:

$$w^{(N)}_{(n.n)} = \frac{N!}{((N-n)!\, n!)^2} \langle 0 | (F^{(-)})^{N-n} \int d^3k_1 \ldots d^3p'_n \prod_{i=1}^{n} f^* (\mathbf{k}_i)\, a^{(-)} (\mathbf{k}'_i)\, G^*_{(1.1)} (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} a^{(+)} (\mathbf{p}_j) f (\mathbf{p}'_j) G_{(1.1)} (\mathbf{p}_j, \mathbf{p}'_j) (F^{(+)})^{N-n} | 0 \rangle. \qquad (15)$$

Как и в обсуждавшемся выше выражении (11), в (16) подавляющий вклад дается членами, содержащими свертки операторов $a^{(-)}(\mathbf{k}_i')a^{(+)}(\mathbf{p}_j)=\delta^3(\mathbf{k}_i'-\mathbf{p}_j)$. Учитывая только такие члены, получим для $w_{(n.n)}^{(N)}$ значение

$$w_{(n.n)}^{(N)}=\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(w_{(1.1)}^{(1)}\right)^n. \tag{16}$$

Приравнивая вновь $w_{(n.n)}^{(N)}$ и $w_{(n+1.n+1)}^{(N)}$, мы приходим к уравнению для определения того $n=n_{\max}$, при котором $w_{(n.n)}^{(N)}$ достигает наибольшего значения. Это $n_{\max}$ оказывается иным, чем для процесса поглощения, а именно:

$$n_{\max}\approx Nw_{(1.1)}^{(1)}. \tag{17}$$

Эта оценка, как и (10), основанная на учете одних только кинематических эффектов, применима лишь при $Nw_{(1.1)}^{(1)}>1$ (но $w_{(1.1)}^{(1)}\ll 1$).

Проведенное выше рассмотрение процессов многобозонного поглощения и рассеяния дает достаточно полное представление о том методе, который можно применить и для оценок, относящихся к процессам других типов. Решающее значение в рамках этого метода имеют чисто комбинаторные оценки плюс выделение того члена в выражениях для вероятностей процессов, который играет основную роль; отличительной особенностью такого рода членов является то, что в них выступает минимальное число сверток операторов, входящих в матрицы переходов, с теми операторами, которые входят в $\Psi^{(N)}$. Общая тенденция, которая может быть прослежена при использовании такого метода для оценок кинематических нерезонансных максимумов, оказывается такой:

Для всех — как упругих, так и неупругих — процессов, протекающих при падении на «мишень» большого числа бозонов N, если только N достигает того значения, при котором $Nw>1$ (где w есть вероятность рассматриваемого процесса), вероятность многократной реализации такого процесса оказывается больше, чем однократного. Однако использованный метод перестает быть эффективным при рассмотрении переходов, приводящих к значительному увеличению числа бозонов.

Изложенное выше не относилось лишь к бозонам какого-то определенного типа; это позволяет говорить об универсальности кинематических нерезонансных максимумов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reiss H. R. «J. Math. Phys.». 1962, 3, 59.
2. Brown L. S., Kibble T. W. «Phys. Rev.», 1963, 27, 218.
3. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 1964, 46, 776; 1964, 47, 1130.
4. Гольдман И. И. ЖЭТФ, 1964, 46, 1417.
5. Келдыш Л. В. ЖЭТФ, 1964, 47, 1945.
6. Ternov I. M., Bagrov V. G., Khapaev A. M. «Ann. phys.», 1968, 22, 25.
7. Тернов И. М., Халилов В. Р. «Ядерная физика», 1972, 16, 174.
8. Тернов И. М., Халилов В. Р., Журавлев А. Ф., Чижов Г. А. «Изв. вузов. Физика», 1973, № 1, 7.
9. Тернов И. М., Халилов В. Р. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1974, 15, 2, 195.
10. Зельдович Я. Б. «Успехи физ. наук», 1973, 110, 139.
11. Григорьев В. И. «Теор. и матем. физика», 1976, 29, 411.
12. Гостев В. Б. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1967, № 2, 37.

Кафедра
квантовой теории

Поступила в редакцию
21.08.78