

Тогда (A) можно переписать в виде:

$$\Pi_1 + \Pi_2 \approx \frac{1}{v} \ln v - \frac{\pi i}{v}.$$

Интегрируя это выражение по v , получим, с точностью до $1/\ln(Q/ms)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{Q/ms} v dv (\Pi_1 + \Pi_2) &\approx \int_0^{Q/ms} \frac{dv}{\rho_0 + v - M(\rho_0 + v)} \approx \\ &\approx \frac{Q}{ms} \ln \frac{Q}{ms} - i\pi \frac{Q}{ms}. \end{aligned} \quad (C)$$

О нижнем пределе интегрирования см. замечание после формулы (17). С другой стороны, выражение (C) есть вклад наиболее существенной области $u \sim 0$ в интеграл Π_2 . Таким образом, оценка, использованная в тексте, справедлива с точностью $\sim \left(\ln \frac{Q}{ms}\right)^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонч-Бруевич В. Л., Дрожжов Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном.», 1977, № 4, 119.
2. Лифшиц И. М., Каганов М. И. «Успехи физ. наук», 1959, 69, 419.
3. Питаевский Л. П. ЖЭТФ, 1959, 36, 1168.
4. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. М., 1961.
5. Бонч-Бруевич В. Л. «ДАН СССР», 1962, 147, 1049.
6. Engelsberg S., Shriifer J. R. «Phys. Rev.», 1963, 131, 993.

Кафедра
физики полупроводников

Поступила в редакцию
10.03.78

УДК 533.951.7

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ, П. А. ПОЛЯКОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Линейная теория плазменных волн не учитывает влияния возмущенных величин на фоновое распределение частиц. Линейные волны могут затухать или нарастать, тем не менее средние значения параметров плазмы с течением времени не меняются. Чтобы рассмотреть обратное влияние возмущений в плазме на среднюю функцию распределения частиц, необходимо в уравнениях, описывающих плазму, учитывать нелинейные члены. Учет нелинейных членов приводит как к зависимости от времени среднего равновесного распределения, так и к появлению взаимодействия между волнами, что сильно усложняет теоретический анализ плазменных явлений. Однако если амплитуды волн в плазме достаточно малы, можно пренебречь взаимодействием между волнами, но учесть влияние нелинейных членов на средние величины. Указанная нелинейная теория была впервые разработана Вedenовым, Велиховым, Сагдеевым [1] и Драймондом и Пайнсом [2]. Отметим, что как в линейной, так и в нелинейной теориях в качестве единственной причины затухания волн в бесстолкновительной плазме рассматри-

валось затухание Ландау. Однако, как впервые было указано в работах [3, 4], в бесстолкновительной плазме существует радиационное затухание, которое во многих практически важных случаях является более важным, чем затухание Ландау. Поэтому представляет интерес рассмотреть квазилинейную теорию с учетом радиационных эффектов.

Пусть $f'(x^\alpha, u^\beta)$ — истинное распределение частиц в плазме. Определим среднюю функцию распределения

$$f_0 \equiv \frac{1}{V} \int f'(x^\alpha, u^\beta) dr \equiv \langle f'(x^\alpha, u^\beta) \rangle. \quad (1)$$

Здесь V — некоторый достаточно большой объем, превышающий объем любой неоднородности в плазме.

Рассмотрим релятивистское кинетическое уравнение Власова с учетом радиационного торможения [4]

$$u^\alpha \frac{\partial f'}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left[\left(\frac{e}{mc^2} F^{\beta\alpha} u_\alpha + \frac{1}{mc} f^\beta \right) f' \right] = 0, \quad (2)$$

где

$$f^\beta = \frac{2}{3} \frac{e^3}{mc^3} \frac{\partial F^{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} u_\alpha u^\gamma - \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} F^{\beta\alpha} F_{\gamma\alpha} u^\gamma + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} (F_{\gamma\sigma} u^\sigma) (F^{\gamma\alpha} u_\alpha) u^\beta,$$

$F^{\beta\alpha}$ — тензор электромагнитного поля.

Ограничимся рассмотрением плазм, частицы которых имеют нерелятивистские тепловые скорости. Тогда в нерелятивистском приближении уравнение (2) примет вид [5]

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \text{div}_r (v f') + \text{div}_v (w f') = 0, \quad (3)$$

где

$$w = \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{vH}] + \frac{2}{3} \frac{e^3}{m^2 c^3} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} [\mathbf{EH}]. \quad (4)$$

Представим функцию распределения в виде $f' = f_0 + f$ и предположим, что $|f| \ll |f_0|$. Пусть в плазме отсутствуют средние поля $\langle \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle = 0$, а величины амплитуд колебаний полей \mathbf{E} и \mathbf{H} достаточно малы. Тогда, усредняя уравнение (3) и пренебрегая в нем величинами 3-го порядка по $|\mathbf{E}|$, $|\mathbf{H}|$ и $|f|$, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \text{div}_v \left\{ \left(\frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{vH}] + \frac{2}{3} \frac{e^3}{m^2 c^3} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right) f \right\} + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle [\mathbf{EH}] \rangle f_0 = 0. \quad (5)$$

Разложим величины f , \mathbf{E} , \mathbf{H} в интеграл Фурье

$$f = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}] f_{\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}] \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}] \mathbf{H}_{\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k}.$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \text{div}_v \left\{ \frac{1}{V} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{e}{m} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{vH}_{-\mathbf{k}}] - \frac{2}{3} \frac{e^3}{m^2 c^3} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} (\omega(-\mathbf{k}) + \mathbf{k}\mathbf{v}) \right) f_{\mathbf{k}} \right] + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{1}{V} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}] f_0 \right\} = 0. \quad (7)$$

Далее предположим, как это обычно делается в квазилинейной теории [6], что в первом приближении значения величин E_k , H_k и f_k в (7) определяются согласно линейной теории [4]:

$$E_k(t) = E_k e^{-i\omega t}, \quad H_k(t) = H_k e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

$$f_k = \frac{1}{i(\omega - kv)} \operatorname{div}_v \left\{ \left(\frac{e}{m} E_k + \frac{e}{mc} [vH_k] \right) \left(1 - i \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} (\omega - kv) \right) f_0 \right\}. \quad (9)$$

Рассмотрим пространственно-однородную плазму, в которой распространяется ленгмюровская волна с волновым вектором k , параллельным координатной оси Ox . Тогда

$$E_k = \{E_k, 0, 0\}, \quad H_k = 0, \quad k = \{k, 0, 0\}. \quad (10)$$

Дисперсионное уравнение для продольных волн в плазме согласно линейной теории [4] в нерелятивистском приближении имеет вид

$$1 + \frac{4\pi r_0 c^2}{k} \int \frac{1}{\omega - kv} \frac{\partial}{\partial v^1} \left[\left(1 - i \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} (\omega - kv) \right) f_0 \right] dv = 0, \quad (r_0 = e^2/mc^2). \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что для $\omega' = \operatorname{Re} \omega$ и $\delta = \operatorname{Im} \omega$ имеют место соотношения

$$\omega'(k) = -\omega'(-k), \quad \delta(k) = \delta(-k). \quad (12)$$

Подставляя выражение для функции f_k (9) в уравнение (7) и учитывая соотношения (10) и (12), несложно получить уравнение для функции f_0 :

$$\begin{aligned} \frac{df_0}{dt} + 8\pi \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v^1} \left\{ \int dk \frac{\mathcal{E}_k}{i(\omega - kv^1)} \left[1 + i \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} (\omega - kv^1 + i2\delta) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial v^1} \left[\left(1 - i \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} (\omega - kv^1) \right) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\mathcal{E}_k = E E_{-k}/64\pi^4 V$ — спектральная плотность электростатической энергии, для которой согласно (12) справедливо уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = 2\delta \mathcal{E}_k. \quad (14)$$

Отметим, что интегрирование в (13) следует проводить по контуру Ландау [7].

Уравнение (13) называется квазилинейным уравнением диффузии. Оно описывает изменение фонового распределения с течением времени. С помощью этого уравнения несложно выяснить, как изменяются такие важные характеристики плазмы, как плотности числа частиц $n(t)$, плотность импульса $\vec{\mathcal{P}}(t)$, плотность энергии $\omega(t)$ и температура плазмы $\theta(t)$. Для этого следует проинтегрировать уравнение (13) по скоростям с весами 1, v и v^2 и использовать соотношения (11) и (12). Тогда получим

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int f_0 dv = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int m \mathbf{v} f_0 d\mathbf{v} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial n(t) \theta(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m \mathbf{v}^2}{2} f_0 d\mathbf{v} = -\frac{4}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2 U - 2\delta U, \quad (17)$$

где $U = \int \epsilon_k dk$ — плотность электростатической энергии.

Уравнения (15) и (16) совпадают с соответствующими уравнениями в квазилинейной теории без учета радиационного торможения [6]. Из них следует, что ленгмюровские волны не изменяют средней плотности частиц и среднего импульса плазмы. Однако в отличие от квазилинейной теории, не учитывающей радиационного рассеяния волн [6], учет радиационных эффектов приводит к изменению полной энергии плазмы. Действительно, так как согласно (14) $\partial U/\partial t = 2\delta U$, из (17) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int \left(\frac{m \mathbf{v}^2}{2} + U \right) f_0 d\mathbf{v} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = -\frac{4}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2 U. \quad (18)$$

Отметим, что для власовской плазмы, в которой взаимодействие частиц происходит через среднее самосогласованное поле, уравнение (18) несложно вывести, исходя из закона сохранения энергии. Действительно, согласно классической электродинамике радиационная энергия, излучаемая нерелятивистским электроном в телесный угол $d\Omega$ в электрическом поле E за единицу времени, равна [8]

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [E\mathbf{n}]^2 d\Omega. \quad (19)$$

Учитывая, что в нашем приближении движения электронов не коррелированы, энергия, излучаемая единицей объема плазмы, будет равна сумме энергий, излучаемых каждым электроном. Поэтому, умножая (19) на $n(t)$ и интегрируя по всем углам, получим энергию, излучаемую единицей объема плазмы, которая в точности совпадает с (18).

Выражение для изменения температуры плазмы (17) упрощается для $\omega/k \gg \sqrt{\theta/m}$. В этом случае из дисперсионного уравнения (11) следует, что $\delta \cong -r_0 \omega_p / 3c$ [4]. Тогда, учитывая, что $n(t) = n_0 = \text{const}$, имеем

$$\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = -\frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2 \frac{U}{n_0}. \quad (20)$$

В частности, если в плазме с плотностью $n_0 = 10^{-16} \text{ см}^{-3}$ и температурой $\theta_0 = 1000 \text{ К}$ распространяется ленгмюровская волна с плотностью электростатической энергии в сто раз меньшей плотности кинетической энергии частиц плазмы, то плазма будет остывать со скоростью 20 К за секунду.

Выясним теперь, как изменяется с течением времени распределение частиц в плазме f_0 . Для этого рассмотрим три области в пространстве скоростей.

Для скоростей $|v| \ll |\omega/k|$ можно в уравнении (13) приближенно положить

$$\frac{1}{\omega - kv^1} = \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{kv^1}{\omega} + \dots \right), \quad \omega'(k) \cong \omega_p, \quad \delta = -r_0 \omega_p^2 / 3c. \quad (21)$$

Предполагая, что пакет волн в плазме достаточно узкий, так что можно вынести за знак интегрирования величины ω , k , δ , из (13) получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \cong 2\delta \frac{U}{nm} \frac{\partial}{\partial v^1} \left(2 \frac{k}{\omega_p} f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial v^1} \right). \quad (22)$$

Если $|2kf_0/\omega_p| \ll |\partial f_0/\partial v^1|$, то приближенно имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \cong \frac{2\delta U}{nm} \frac{\partial^2 f_0}{\partial (v^1)^2}. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) при условии, что в начальный момент времени распределение f_0 было максвелловским, имеет вид

$$f_0(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi(\theta_0 + 2U/n - 2U_0/n)}} \exp \left[-\frac{mv_x^2}{2(\theta_0 + 2U/n - 2U_0/n)} \right], \quad (24)$$

где $U = U_0 \exp(2\delta t)$. Отсюда видно, что с течением времени температура плазмы убывает, причем распределение частиц остается максвелловским. На рис. 1 представлены графики значений функции (24) в моменты времени $t=0$ (сплошная кривая) и $t=1$ с (пунктирная кривая) для плазмы с параметрами $\theta_0 = 1000$ К, $U_0/n = 200$ К, $n = 10^{14}$ см $^{-3}$.

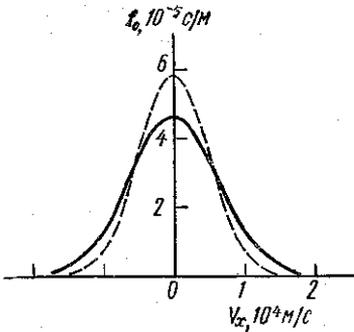


Рис. 1

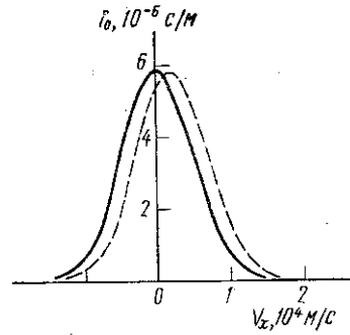


Рис. 2

Отметим, что согласно квазилинейной теории, не учитывающей радиационных эффектов, функция распределения f_0 для $|v| \ll \omega/k$ практически не меняется [7].

Рассмотрим поведение функции распределения f_0 в резонансной области $v_1 \cong \omega/k$. В этом случае при вычислении интеграла в (13) можно использовать формулу Сохоцкого — Племеля и пренебречь всеми слагаемыми, которые при $v^1 \rightarrow \omega/k$ стремятся к нулю [6]. Из (13) получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \cong \frac{8\pi^2 e^2}{vm^2} \mathcal{G}_k \cong \omega/v \left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial (v^1)^2} + i \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} k \frac{\partial f_0}{\partial v^1} \right]. \quad (25)$$

Учитывая, что во всех реальных случаях второе слагаемое в (25) значительно меньше первого, для скорости изменения функции распределения f_0 в резонансной области получим то же выражение, что и в квазилинейной теории без учета радиационного торможения [6]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \cong \frac{8\pi^2 e^2}{Vm^2} \mathcal{G}_{k \approx \omega/v} \frac{\partial^2 f_0}{\partial (v^1)^2}. \quad (26)$$

Из уравнения (26) следует, что в резонансной области функция распределения частиц возрастает.

Наконец, рассмотрим поведение функции распределения при $|kv^1| \gg |\omega|$. В этом случае можно положить

$$\frac{1}{\omega - kv^1} \cong -\frac{1}{kv^1} \left(1 - i \frac{\delta}{kv^1}\right). \quad (27)$$

Вычисляя интеграл в уравнении (13), для f_0 несложно получить

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{2\delta U}{nm} \frac{\partial^2 f_0}{\partial (v^1)^2} \left(\frac{\omega_p}{kv^1}\right)^2. \quad (28)$$

Из (28) видно, что за резонансной областью функция распределения с течением времени уменьшается.

Рассмотрим теперь плазму, в которой распространяется электромагнитная волна с волновым вектором \mathbf{k} , параллельным оси Ox .

В этом случае

$$\mathbf{k} = \{k, 0, 0\}, \quad \mathbf{E}_k = \{0, E_k, 0\}, \quad \mathbf{H}_k = \{0, 0, H_k\}. \quad (29)$$

По-прежнему будем полагать, что тепловые скорости частиц плазмы нерелятивистские. Учитывая, что дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в плазме согласно линейной теории [4] равно

$$\omega'^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2, \quad (30)$$

в выражениях (7) и (9) можно положить

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} \cong \omega'. \quad (31)$$

Согласно (29)—(31) уравнение диффузии (7) для функции распределения примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial (v^1)^2} \left\{ \frac{8\pi e^2}{m^2} \int \frac{dk \delta_k}{i\omega'} \left[1 - \left(i \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \omega' \right)^2 \right] f_0 \right\} + \\ + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{1}{V} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} E_{-k} H_k \frac{\partial f_0}{\partial v^1} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Так как для электромагнитной волны

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{kE}_k]/k$$

и принимая во внимание соотношение $\omega'(k) = -\omega'(-k)$, из (32) имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 2\delta_R \frac{u}{nmc} \frac{\partial f_0}{\partial v^1}, \quad (33)$$

где $\delta_R = -\frac{1}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2$, $u = \frac{1}{V} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{E_k E_{-k}}{4\pi}$ — энергия электромагнитной волны.

В квазилинейной теории без учета радиационного торможения электромагнитные волны не затухают, поэтому средние параметры плазмы остаются неизменными. Как видно из уравнения (33), учет радиационных эффектов приводит к зависимости средней функции распределения от времени.

Рассмотрим, как изменяются с течением времени средняя плотность $n(t)$, плотность импульса $\vec{\mathcal{P}}(t)$ и энергии $\omega(t)$ частиц плазмы.

Для этого проинтегрируем (33) по скоростям с весами 1, mv , $mv^2/2$. В результате получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int f_0 dv = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int mvf_0 dv = -2\delta_R \frac{u}{c} = -\frac{\partial(u/c)}{\partial t}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{mv^2}{2} f_0 dv = -2\delta_R \frac{u}{nmc} \mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathcal{P}^2}{2nm}. \quad (36)$$

Из уравнений (34)—(36) следует, что плотность числа частиц плазмы при распространении в ней электромагнитной волны не меняется. Импульс единицы объема плазмы с течением времени увеличивается, причем если в начальный момент времени $\vec{\mathcal{P}}(0) = 0$, то $\vec{\mathcal{P}}(t) \neq 0$, т. е. электромагнитная волна увлекает частицы плазмы. Суммарный импульс частиц и электромагнитной волны остается всегда постоянным, т. е. увеличение импульса плазмы в точности равно уменьшению импульса волны.

Из (36) видно, что энергия плазмы меняется незначительно. Увеличение ее обусловлено только изменением импульса частиц плазмы.

Наконец, приведем точное решение уравнения (33) для случая, когда в начальный момент времени распределение частиц было максвелловским. Это решение имеет вид

$$f_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi\theta_0}} \exp \left[-\frac{m}{2\theta_0} \left(v^1 - \frac{u_0 - u}{nmc} \right)^2 \right].$$

Из (37) видно, что электромагнитные волны вследствие рассеяния не изменяют температуру плазмы, но приводят к появлению у электронов средней скорости, равной $(u_0 - u)/nmc$. На рис. 2 изображена графически функция (37) в момент $t=0$ (сплошная линия) и $t=60$ с (пунктирная линия) при освещении плазмы ($\theta = 800$ К) некогерентным источником света с плотностью энергии $u_0 = 46$ эрг/см³.

Таким образом, учет радиационных эффектов приводит к изменению функции распределения частиц плазмы как при распространении в ней ленгмюровских волн, так и электромагнитных. Полная энергия частиц плазмы при распространении ленгмюровских волн не сохраняется вследствие радиационного торможения. При распространении электромагнитных волн в плазме увеличение среднего импульса и энергии частиц обусловлено уменьшением импульса и энергии волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Успехи физ. наук», 1961, 73, 701.
2. Drummond W. E., Pines D. «Nucl. Fusion Suppl.», 1962, Pt. 3, 1049.
3. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та», 1978, 19, № 1, 65.
4. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та», 1978, 19, № 3, 95.
5. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1961.
6. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М., 1975.
7. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. М., 1974.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.