УДК 518.98+621.372.061

В. И. ШЕСТАКОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КАСКАДНЫХ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ НОРМАЛЬНЫХ *n*-ПРОВОДНЫХ ЦЕПЕЙ

В данной статье излагается метод символического представления каскадных и параллельных соединений нормальных n-проводных цепей, т. е. кортежей n невзаимодействующих двухпроводных цепей. Этот метод является развитием и обобщением алгебры двухполюсных схем, предложенной автором ранее [1].

1°. Вместо традиционных терминов: двух-, четырех- и $2n$-полюсник, будем употреблять здесь соответственно термины: $1P$-, $2P$- и nP-**цепь**, термины чуть более короткие, чем применяемые Ш. Карни [2].

nP-цепь, являющуюся **кортежем** (упорядоченным набором) n $1P$-цепей, не связанных друг с другом емкостно, индуктивно или резистивно (кондуктивно), назовем **нормальной** n**-проводной цепью**, или, короче, **нормальной** nP**-цепью**.

$1P$-цепь будем обозначать символом ее адмитанса Y или импеданса Z, а нормальную nP-цепь — кортежем $(Y_1, ..., Y_n)$ адмитансов $Y_1, ..., Y_n$ или кортежем $(Z_1, ..., Z_n)$ импедансов $Z_1, ..., Z_n$ $1P$-цепей, составляющих данную nP-цепь. Первый из этих кортежей назовем **адмитансным**, а второй — **импедансным символом** нормальной nP-цепи.

При **фиксированном** числе n кортеж $(V_1, ..., V_n)$ любых объектов $V_1, ..., V_n$ условимся обозначать, подобно вектору, жирной буквой $\mathbf{V}$, т. е. определим $\mathbf{V}$ как сокращенное обозначение кортежа $(V_1, ..., V_n)$ равенством по определению:

$$\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n). \tag{D1}$$

Из этой общей формулы следуют, в частности, равенства

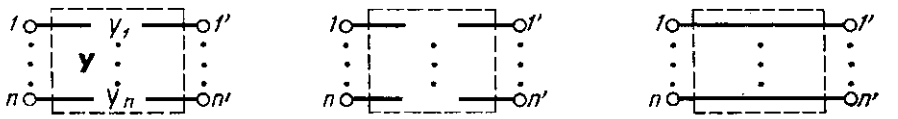
$$\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n), \quad (1а); \qquad \mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n), \quad (1б)$$

определяющие $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ как сокращенные обозначения кортежей $(Y_1, ..., Y_n)$ и $(Z_1, ..., Z_n)$. Мы назовем $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ **адмитансом** и соответственно **импедансом** nP**-цепи**, изображенной на рис. 1, *а*. Равенства (1а), (1б) воспроизведены соответственно в первой и во второй строках подписи к рис. 1, *а*. Левая часть равенства (1а) — адмитанс $\mathbf{Y}$ — символизирует нормальную nP-цепь как единое целое. Ей соответствует на рис. 1, *а*, помеченный буквой $\mathbf{Y}$ квадрат, объемлющий схематично изображенную на этом рисунке нормальную nP-цепь. Первая часть равенства (1а) — кортеж $(Y_1, ..., Y_n)$ адмитансов $Y_1, ..., Y_n$ является более детальным символом той же nP-цепи. Кортежу $(Y_1, ..., Y_n)$ взаимно-однозначно соответствует кортеж n двухполюсных цепей, в своей совокупности образующих nP-цепь, схематично изображенную на рис. 1, *а* посредством n горизонтальных линий, помеченных буквами $Y_1, ..., Y_n$. Равенство (1б) аналогичным образом соответствует схематичному изображению той же

nP-цепи, получаемому из рис. 1, *а* посредством замены букв $\mathbf{Y}$, $Y_1, \ldots, Y_n$ соответственно буквами $\mathbf{Z}$, $Z_1, \ldots, Z_n$.

Определение 1. Кортежи $\mathbf{V}_1 = (V_{11}, \ldots, V_{1n})$ и $\mathbf{V}_2 = (V_{21}, \ldots, V_{2n})$ **равны**, т. е. $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$, если и только если $V_{1k} = V_{2k}$ при каждом значении $k (k = 1, \ldots, n)$.

Определение 2. Нормальные nP-цепи называются **равными**, если и только если равны их адмитансы $\mathbf{Y}_1$ и $\mathbf{Y}_2$ (импедансы $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$).



а — $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$,

б — $\overline{0}$ См $= (0, \ldots, 0)$ См, $\overline{\infty}$ Ом $= (\infty, \ldots, \infty)$ Ом,

в — $\overline{\infty}$ См $= (\infty, \ldots, \infty)$ См, $\overline{0}$ Ом $= (0, \ldots, 0)$ Ом

Рис. 1

Определение 3. Величина V называется **комплексной**, если она представима в виде

$$V = \gamma V_e, \tag{2}$$

где γ — комплексное число, а V_e — **положительная скалярная величина** [3].

Комплексное число γ может быть как **конечным**, т. е. имеющим вид $\gamma = \alpha + j\beta$, где α, β — **конечные** действительные числа, $j = \sqrt{-1}$, так и **бесконечным**, т. е. имеющим вид $\gamma = \infty$, где ∞ — несобственное комплексное число. В последнем случае равенство (2) принимает вид

$$V = \infty V_e. \tag{3}$$

Равенства $V = 0V_e$ и $V = \infty V_e$ можно соответственно заменить равенствами $V = 0$ и $V = \infty$ лишь в случае, когда V_e — положительное число, т. е. когда величина V является, как говорят, **безразмерной**. Числа 0 и ∞ будем называть по-прежнему [1] **вырожденными**, а значения $0V_e$ и ∞V_e — **вырожденными значениями** величины V. Вырожденными значениями адмитанса и импеданса являются следующие:

$$Y = 0 \text{ См}, \quad \infty \text{ См}; \quad Z = 0 \text{ Ом}, \quad \infty \text{ Ом}. \tag{4}$$

Определение 4. $1P$-цепи, адмитансы (импедансы) которых имеют вырожденные значения, будем называть **вырожденными**. nP-цепь будем называть **вырожденной**, если и только если **все** $1P$-цепи, составляющие эту nP-цепь, являются вырожденными.

2^0. Из ($D1$) и (2) следует равенство

$$\mathbf{V} = (\gamma_1 V_{e_1}, \ldots, \gamma_n V_{e_n}), \tag{5}$$

где V_{e_k} — единица измерения величины V_k, $(k = 1, \ldots, n)$. В частности, если $V_{e_k} = V_e$ для каждого k, то равенство (5) принимает вид

$$\mathbf{V} = (\gamma_1 V_e, \ldots, \gamma_n V_e). \tag{6}$$

При $V_e=1$ получаем отсюда кортеж

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \tag{7}$$

комплексных чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (включая и значения, равные ∞).

Определив умножение кортежа γ на любую положительную величину U посредством равенства

$$\gamma U = (\gamma_1 U, \ldots, \gamma_n U) \tag{D2}$$

и полагая, в частности, $U=V_e$, мы можем равенство (6) представить в следующем виде:

$$\mathbf{V} = \gamma V_e. \tag{8}$$

В дальнейшем именно в таком виде мы будем писать кортежи $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$.

Обозначая кортежи из n нулей и n несобственных чисел ∞ соответственно символами $\bar{0}$ и $\bar{\infty}$, мы можем вырожденные значения кортежа $\mathbf{V}$ любых n однородных величин записать в следующем виде:

$$\bar{0}V_e \text{ и } \bar{\infty} V_e.$$

Кортежи $\bar{0}$ См и $\bar{\infty}$ Ом могут служить символами **совершенно непроводящей (пустой)** (рис. 1, *б*), а кортежи $\bar{\infty}$ См и $\bar{0}$ Ом — символами **идеально проводящей** нормальной nP-цепи (рис. 1, *в*).

3°. Операцию преобразования комплексного числа γ в обратное ему число γ^{-1} будем называть **операцией обращения числа** γ. Мы распространим операцию обращения на вырожденные числа 0 и ∞ посредством следующего определения:

$$\gamma^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma = \infty, \\ \infty, & \text{если } \gamma = 0, \\ 1/\gamma, & \text{если } \gamma \neq 0, \infty, \end{cases} \tag{D3}$$

Операцию обращения комплексной величины V определим формулой

$$V^{-1} = \gamma^{-1} V_e^{-1}, \tag{D4}$$

а операцию обращения кортежа V комплексных величин — формулой

$$\mathbf{V}^{-1} = (V_1^{-1}, \ldots, V_n^{-1}). \tag{D5}$$

Отсюда и из предыдущих определений следует равенство

$$\mathbf{V}^{-1} = \gamma^{-1} V_e^{-1}, \tag{9}$$

если $\mathbf{V}$ — кортеж **однородных** величин. В частности, для вырожденных значений кортежа $\mathbf{V}$ справедливы равенства

$$(\bar{0} V_e)^{-1} = \bar{\infty} V_e^{-1} \ (10а), \qquad (\bar{\infty} V_e)^{-1} = \bar{0} V_e^{-1}. \tag{10б}$$

Операция обращения кортежа $\mathbf{V}$ очевидно **инволютивна**, т. е.

$$(\mathbf{V}^{-1})^{-1} = \mathbf{V} \tag{11}$$

для любого $\mathbf{V}$. В частности,

$$\mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y} \tag{12}$$

для любых значений $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$.

Из определения операции $\mathbf{V}^{-1}$ следует, что равенства $\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_1^{-1}=\mathbf{V}_2^{-1}$ равносильны друг другу. В частности, равносильны друг другу и равенства

$$\mathbf{Y}_1=\mathbf{Y}_2 \text{ и } \mathbf{Z}_1=\mathbf{Z}_2.$$

Равенство же $\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}$ имеет смысл лишь в случае, когда компоненты кортежа $\mathbf{V}$ являются числами.

Взаимообратные кортежи $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ являются принципиально совершенно равноправными символами одной и той же нормальной nP-цепи. Однако равенство $\mathbf{Y}=\mathbf{Z}$ бессмысленно из-за различия размерностей $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$.

4^0. Операцию $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$ сложения кортежей $\mathbf{V}_1=(V_{11},\ldots,V_{1n})$ и $\mathbf{V}_2=$ $=(V_{21},\ldots,V_{2n})$ определим формулой

$$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2=(V_{11}+V_{21},\ldots,V_{1n}+V_{2n}). \tag{D6}$$

Операцию $\mathbf{V}_1\bullet\mathbf{V}_2$, определяемую формулой

$$\mathbf{V}_1\bullet\mathbf{V}_2=(\mathbf{V}_1^{-1}+\mathbf{V}_2^{-1})^{-1}, \tag{D7}$$

будем называть операцией **гармонического сложения** кортежей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. При $n=1$ получаем отсюда в качестве частного случая операцию гармонического сложения

$$V_1\bullet V_2=(V_1^{-1}+V_2^{-1})^{-1} \tag{D7.1}$$

комплексных величин V_1 и V_2, использованную автором в алгебре двухполюсных схем [1].

Используя последовательно определения ($D7$), ($D6$), ($D5$) и ($D7.1$), получаем формулу

$$\mathbf{V}_1\bullet\mathbf{V}_2=(V_{11}\bullet V_{21},\ldots,V_{1n}\bullet V_{2n}), \tag{13}$$

аналогичную определению ($D6$) операции сложения $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$.

Легко показать, что операция сложения $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$ выражается через операции гармонического сложения и обращения $\mathbf{V}_1^{-1}$ и $\mathbf{V}_2^{-1}$ кортежей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, как операция гармонического сложения $\mathbf{V}_1\bullet\mathbf{V}_2$ определяется формулой ($D7$) через операции сложения и обращения кортежей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Действительно, из ($D7$) в силу равенства (11) следует формула

$$(\mathbf{V}_1\bullet\mathbf{V}_2)^{-1}=\mathbf{V}_1^{-1}+\mathbf{V}_2^{-1}. \tag{14}$$

После замены $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ соответственно на $\mathbf{V}_1^{-1}$ и $\mathbf{V}_2^{-1}$ и применения равенства (11) получаем из (14) формулу

$$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2=(\mathbf{V}_1^{-1}\bullet\mathbf{V}_2^{-1})^{-1}, \tag{15}$$

которую можно получить из формулы ($D7$) также просто взаимной перестановкой в ней знаков операций: + (плюс) и $\bullet$ (черный кружочек). В частности, при $n=1$ отсюда следует равенство

$$V_1+V_2=(V_1^{-1}\bullet V_2^{-1})^{-1}. \tag{15.1}$$

Аналогично из (14) можно получить формулу

$$(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1}=\mathbf{V}_1^{-1}\bullet\mathbf{V}_2^{-1}, \tag{16}$$

из которой при $n=1$ следует равенство

$$(V_1+V_2)^{-1}=V_1^{-1}\bullet \mathbf{V}_2^{-1}. \tag{16.1}$$

Из равенств

$$0+\gamma=\gamma, \tag{17а}$$

$$\infty+\gamma=\infty, \tag{17б}$$

справедливых, как известно, **для любого** комплексного числа γ (включая и $\gamma=\infty$), следует справедливость аналогичных равенств

$$\bar{0}V_e+\mathbf{V}=\mathbf{V}, \tag{18а}$$

$$\bar{\infty}V_e+\mathbf{V}=\bar{\infty}V_e \tag{18б}$$

для кортежа $\mathbf{V}$ любых однородных комплексных величин.

Кортежи $\bar{0}V_e$ и $\bar{\infty}V_e$ являются, таким образом, **нейтральным элементом** (нулем) и соответственно **всепоглощающим элементом** для операции сложения $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$ кортежей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Для операции же гармонического сложения $\mathbf{V}_1\bullet\ \mathbf{V}_2$ кортежей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ элемент $\bar{0}V_e$ является, наоборот, **всепоглощающим элементом**, а элемент $\bar{\infty}V_e$ — **нейтральным элементом** («нулем»), т. е.

$$\bar{0}V_e\bullet\mathbf{V}=\bar{0}V_e, \tag{19а}$$

$$\bar{\infty}V_e\bullet V=V. \tag{19б}$$

Действительно, последовательно используя формулы ($D7$), (10а), (18б) и (10б), получаем цепочку равенств

$$\bar{0}V_e\bullet\mathbf{V}=((\bar{0}V_e)^{-1}+\mathbf{V}^{-1})^{-1}=(\bar{\infty}V_e^{-1}+\mathbf{V}^{-1})^{-1}=(\bar{\infty}V_e^{-1})^{-1}=\bar{0}V_e,$$

из которой следует равенство (19а). Аналогично из формул ($D7$), (10б), (18а) и (11) получаем равенство (19б).

5°. **Каскадным соединением** двух nP-цепей называют такое их соединение, при котором выходные полюсы $1', \ldots, n'$ одной соединены (находятся в электрическом контакте) соответственно с входными полюсами $1, \ldots, n$ другой из них. Ту из этих двух nP-цепей, входные полюсы которой оказываются при этом также и входными полюсами их каскадного соединения, называют **первым**, а другую — **вторым каскадом** полученного соединения. Узлы, образовавшиеся в результате каскадного соединения двух nP-цепей, полюсами уже не являются, и потому они изображены на рис. 2 черными **кружочками** в отличие от полюсов, изображаемых маленькими **окружностями.**

Каскадные соединения двух нормальных nP-цепей, изображенные ны рис. 2, *а*, являются, как видно из рис. 2, *б*, **кортежем *n* последовательных соединений** соответствующих компонент этих nP-цепей. Это является, очевидно, следствием нескрещенности $1P$-цепей — компонент нормальной nP-цепи, т. е. того, что входной и выходной полюсы k-той ($k=1, \ldots, n$) компоненты нормальной nP-цепи являются в то же время соответственно полюсами k и k' самой этой цепи.

При последовательном соединении двух $1P$-цепей с импедансами Z_{1k} и Z_{2k} ($k=1, \ldots, n$), получается, как известно, $1P$-цепь с суммарным импедансом $Z_{1k}+Z_{2k}$ и, стало быть, в результате каскадного соединения двух нормальных nP-цепей с импедансами $\mathbf{Z}_1=(Z_{11}, ..., Z_{1n})$ и $\mathbf{Z}_2=$ $=(Z_{21}, ..., Z_{2n})$ получается нормальная nP-цепь с импедансом

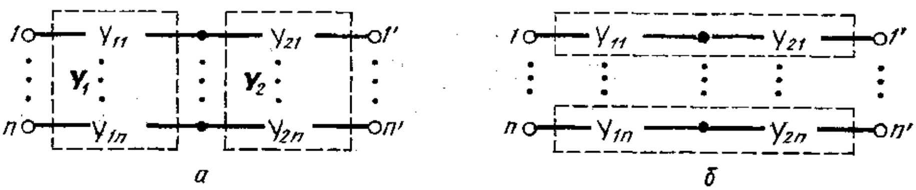
$$\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2=(Z_{11}+Z_{21}, \ldots, Z_{1n}+Z_{2n}). \tag{20}$$

Выполнив операцию обращения обеих частей этого равенства, получим адмитанс

$$\mathbf{Y}_1 \bullet \mathbf{Y}_2=(Y_{11} \bullet Y_{21}, \ldots, Y_{1n} \bullet Y_{2n}) \tag{21}$$

каскадного соединения тех же nP-цепей.

Равенства (21) и (20) воспроизведены в первой и соответственно во второй строке подписи к рис. 2. Знаки $+$ и $\bullet$ в выражениях $\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Y}_1 \bullet \mathbf{Y}_2$ левых частей этих равенств служат знаками каскадного соеди-



$\mathbf{Y}_1 \bullet \mathbf{Y}_2=(Y_{11}, ..., Y_{1n}) \bullet (Y_{21}, ..., Y_{2n}) \quad = \quad (Y_{11} \bullet Y_{21}, ..., Y_{1n} \bullet Y_{2n})$

$\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2=(Z_{11}, ..., Z_{1n})+(Z_{21}, ..., Z_{2n}) \quad = \quad (Z_{11}+Z_{21}, ..., Z_{1n}+Z_{2n})$

Рис. 2

нения двух нормальных nP-цепей, изображенных пунктирными квадратами на рис. 2, *а*. n знакам $+$ и $\bullet$ в выражениях правых частей равенств (21) и (20) взаимно-однозначно соответствуют n узлов в n $1P$-цепях, изображенных пунктирными прямоугольниками на рис. 2, *б*.

При $n=2$ мы получаем из равенств (20) и (21) соответственно равенства

$$\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2=(Z_{11}+Z_{21},\ Z_{12}+Z_{22}), \tag{22}$$

$$\mathbf{Y}_1 \bullet \mathbf{Y}_2=(Y_{11} \bullet Y_{21},\ Y_{12} \bullet Y_{22}), \tag{23}$$

символически описывающие каскадное соединение двух нормальных $2P$-цепей, называемых в недавно опубликованной статье [4] **прямыми** 2-проводными цепями. В этой статье рассматриваются каскадные соединения не только прямых, но также и скрещенных $2P$-цепей, в связи с чем каскадные соединения **любых** $2P$-цепей обозначались там знаком $\oplus$ операции, определяемой четырьмя равенствами (D 2а)—(D 2г). Эта операция совпадает, как видно из формулы (D 2а), с операцией сложения $\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2$ кортежей импедансов $\mathbf{Z}_1=(Z_{11}, Z_{12})$ и $\mathbf{Z}_2=(Z_{21}, Z_{22})$ в случае, когда соединяемые каскадно $2P$-цепи являются нормальными (прямыми).

Параллельным соединением двух nP-цепей называют такое их соединение, при котором все их полюсы соответственно попарно соединяются друг с другом, как показано на рис. 3, *а*. В результате параллельного соединения двух **нормальных** nP-цепей получается, как видно из рис. 3, *б*, кортеж n попарно параллельных соединений $1P$-цепей, являющихся компонентами этих nP-цепей.

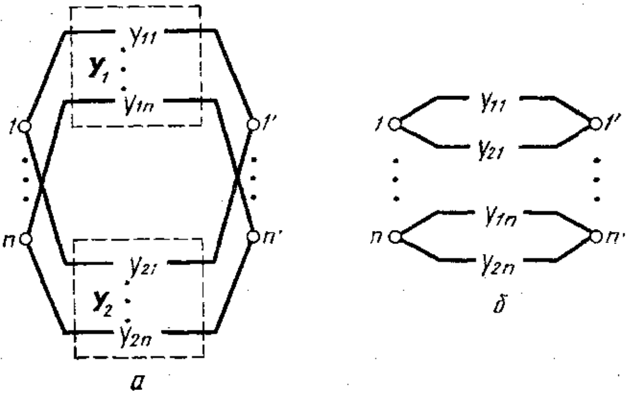
При параллельном соединении $1P$-цепей с адмитансами Y_{1k} и Y_{2k} получается, как известно, $1P$-цепь с адмитансом $Y_{1k}+Y_{2k}$ и, следовательно, в результате параллельного соединения двух нормальных nP-цепей с адмитансами $\mathbf{Y}_1=(Y_{11}, \ldots, Y_{1n})$ и $\mathbf{Y}_2=(Y_{21}, \ldots, {}_{2n})$ получается нормальная nP-цепь с адмитансом

$$\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2=(Y_{11}+Y_{21}, \ldots, Y_{1n}+Y_{2n}). \tag{24}$$

Выполнив операцию обращения обеих частей этого равенства, получим импеданс

$$\mathbf{Z}_1 \bullet \mathbf{Z}_2=(Z_{11} \bullet Z_{21}, \ldots, Z_{1n} \bullet Z_{2n}) \tag{25}$$

параллельного соединения тех же двух нормальных nP-цепей.



$\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2=(\mathrm{Y}_{11}, \ldots, \mathrm{Y}_{1n})+(\mathrm{Y}_{21}, \ldots, \mathrm{Y}_{2n}) \quad = \quad (\mathrm{Y}_{11}+\mathrm{Y}_{21}, \ldots, \mathrm{Y}_{1n}+\mathrm{Y}_{2n})$

$\mathbf{Z}_1 \bullet \mathbf{Z}_2=(\mathrm{Z}_{11}, \ldots, \mathrm{Z}_{1n}) \bullet (\mathrm{Z}_{21}, \ldots, \mathrm{Z}_{2n}) \quad = \quad (\mathrm{Z}_{11} \bullet \mathrm{Z}_{21}, \ldots, \mathrm{Z}_{1n} \bullet \mathrm{Z}_{2n})$

Рис. 3

Равенства (24) и (25) воспроизведены соответственно в первой и во второй строках подписи к рис. 3. Знаки $+$ и $\bullet$ в выражениях $\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$ и $\mathbf{Z}_1 \bullet \mathbf{Z}_2$, являющихся левыми частями этих равенств, служат знаками параллельного соединения двух нормальных nP-цепей, изображенных пунктирными квадратами на рис. 3, *а*. n знакам $+$ и $\bullet$ в выражениях правых частей тех же равенств соответствуют n параллельных соединений $1P$-цепей, изображенных на рис. 3, *б*.

Из равенств (18) и (19) следуют, в частности, равенства:

$$\bar{0}\ \text{См}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}=\overline{\infty}\ \text{См} \bullet \mathbf{Y}, \tag{26}$$

$$\overline{\infty}\ \text{Ом} \bullet \mathbf{Z}=\mathbf{Z}=\bar{0}\ \text{Ом}+\mathbf{Z},$$

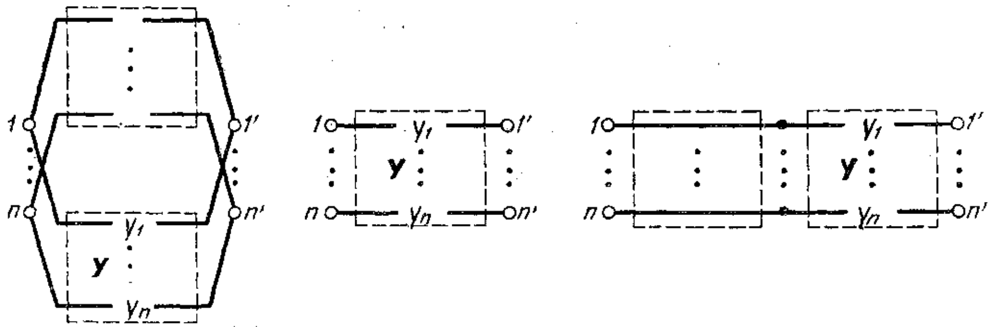
соответствующие nP-цепям, изображенным на рис. 4, и равенства

$$\begin{aligned} &\bar{0}\ \text{См} \bullet \mathbf{Y}=\bar{0}\ \text{См}, \\ &\overline{\infty}\ \text{Ом}+\mathbf{Z}=\overline{\infty}\ \text{Ом}; \end{aligned} \tag{27а}$$

$$\begin{aligned} &\overline{\infty}\ \text{См}+\mathbf{Y}=\overline{\infty}\ \text{См}, \\ &\bar{0}\ \text{Ом} \bullet \mathbf{Z}=\bar{0}\ \text{Ом}, \end{aligned} \tag{27б}$$

соответствующие nP-цепям, изображенным на рис. 5, *а*, и 5, *б*.

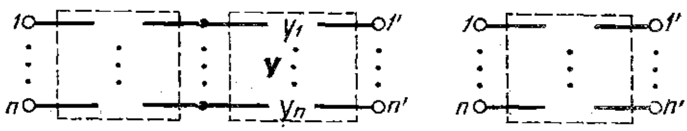
Нейтральными элементами операций параллельного и каскадного соединений nP-цепей являются, как видно из равенств (26) и рис. 5, соответственно пустая nP-цепь (рис. 1, *б*) и идеально проводящая нор-



$\overline{0}$ См$+\mathbf{Y}$	$=$	$\mathbf{Y}$	$=$	$\overline{\infty}$ См $\bullet$ Y
$\overline{\infty}$ Ом $\bullet$ Z	$=$	$\mathbf{Z}$	$=$	$\overline{0}$ Ом$+$Z

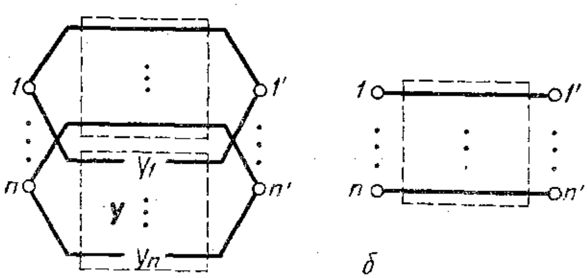
Рис. 4

мальная nP-цепь (рис. 1, *в*). Всепоглощающими элементами параллельного и каскадного соединений нормальных nP-цепей являются, как



а

$\overline{0}$ См $\bullet$ Y	$=$	$\overline{0}$ См
$\overline{\infty}$ Ом$+$Z	$=$	$\overline{\infty}$ Ом



б

$\overline{\infty}$ См$+\mathbf{Y}$	$=$	$\overline{\infty}$ См
$\overline{0}$ Ом $\bullet$ Z	$=$	$\overline{0}$ Ом

Рис. 5

видно из равенств (27) и рис. 5, соответственно идеально проводящая нормальная nP-цепь и пустая nP-цепь. Следует отметить, что равенства (26) и (27) справедливы для **любой** nP-**цепи, а не только для** нормальной nP-цепи, но, разумеется, лишь при том условии, что мы определим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ как символы адмитанса и импеданса **любой** nP-цепи.

6°. Аналогично тому, как в алгебре выражение $a+(b\cdot c)$, где точка служит знаком умножения, обычно записывают в виде выражения $a+bc$, не содержащего скобок, мы условимся и выражения $\mathbf{V}_1+(\mathbf{V}_2\bullet\mathbf{V}_3)$, где черный кружочек служит знаком гармонического сложения, записывать в виде выражения $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\bullet\mathbf{V}_3$, не содержащего скобок. Это условие мы распространим и на случай гармонического сложения **любого числа** кортежей.

Подобно тому как сумма $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\ldots+\mathbf{V}_m$ кортежей $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_m$ сжато записывается символом $\sum\limits_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i$, мы будем гармоническую сумму $\mathbf{V}_1\bullet\mathbf{V}_2\bullet\ldots\bullet\mathbf{V}_m$ тех же кортежей записывать сжато посредством символа $\mathop{\Xi}\limits_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i$. Символ $\mathop{\Xi}\limits_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i$ m-членного гармонического сложения мы можем определить также посредством формулы

$$\mathop{\Xi}_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i=\Big(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i^{-1}\Big)^{-1}, \tag{D8}$$

являющейся обобщением формулы ($D7$). При $n=1$ получаем из ($D8$) формулу

$$\mathop{\Xi}_{i=1}^{m}V_i=\Big(\sum_{i=1}^{m}V_i^{-1}\Big)^{-1}, \tag{D8.1}$$

частным случаем которой является формула ($D7.1$). Используя символы m-членного сложения и гармонического сложения, мы можем обобщения формул ($D6$) и (13) записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i=\Big(\sum_{i=1}^{m}V_{i1},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m}V_{in}\Big), \tag{28a}$$

$$\mathop{\Xi}_{i=1}^{m}\mathbf{V}_i=\Big(\mathop{\Xi}_{i=1}^{m}V_{i1},\ \ldots,\ \mathop{\Xi}_{i=1}^{m}V_{in}\Big). \tag{28б}$$

Условимся называть **A-выражением** [1] всякое алгебраическое выражение $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$, члены которого $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m$ связаны друг с другом только операциями сложения ($+$) и гармонического сложения ($\bullet$). Из этого определения и формул (28) следует, что

$$A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)=(A(V_{11}, \ldots, V_{m1}), \ldots, A(V_{1n}, \ldots, V_{mn})), \tag{29}$$

каково бы ни было A-выражение $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$. Например:

$$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\bullet\mathbf{V}_3=(V_{11}+V_{21}\bullet V_{31}, \ldots, V_{1n}+V_{2n}\bullet V_{3n}), \tag{30}$$

$$\mathbf{V}_1\bullet(\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_3)=(V_{11}\bullet(V_{21}+V_{31}), \ldots, V_{1n}\bullet(V_{2n}+V_{3n})). \tag{31}$$

Определение 5. Выражение $A'(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$, получаемое из A-выражения $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ посредством подстановки $\begin{pmatrix} +, & \bullet, & \overline{0}V_e, & \overline{\infty}V_e \\ \bullet, & +, & \overline{\infty}V_e, & \overline{0}V_e \end{pmatrix}$, назовем **двойственным выражению** $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$.

Очевидно, что

$$A''(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m) = A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m), \tag{32}$$

т. е. A-выражение $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ двойственно двойственному ему выражению $A'(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ или, иначе говоря, выражения $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ и $A'(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ **взаимно-двойственны.**

Определение 6. Равенства, содержащие лишь взаимно-двойственные A-выражения, называются **взаимно-двойственными.**

Из взаимной двойственности операций $+$ и $\bullet$ или, иначе говоря, из того, что эти операции являются **изоморфами** друг друга, следует очевидный **принцип двойственности: Взаимно-двойственные равенства равносильны друг другу**, т. е. они либо оба верны, либо оба ложны.

Этот принцип позволяет вдвое сократить число выводов или доказательств A-равенств, которые необходимо производить. Например, в силу принципа двойственности из коммутативности и ассоциативности сложения мы можем заключить, что **гармоническое сложение ассоциативно и коммутативно.**

Из определения 5 и формул

$$\left(\mathop{\Xi}_{i=1}^{m} \mathbf{V}_i\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{V}_i^{-1}, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{V}_i\right)^{-1} = \mathop{\Xi}_{i=1}^{m} \mathbf{V}_i^{-1}, \tag{33}$$

являющихся соответственно обобщениями формул (14) и (16), следует общая формула:

$$(A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m))^{-1} = A'(\mathbf{V}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{V}_m^{-1}), \tag{34}$$

утверждающая, что операция обращения любого A-выражения $A(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ сводится к замене всех членов двойственного ему выражения $A'(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m)$ их обращениями.

Если члены некоторого алгебраического выражения связаны не только операциями $+$ и $\bullet$, но также и операцией обращения, как, например, левые части равенств (33), то, используя эти равенства, мы можем привести это выражение к равному ему A-выражению, построенному из кортежей $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_m$ и обращений некоторых из них.

7°. Из приведенных выше определений и формул следует, что **всякой цепи, построенной из нормальных nP-цепей с адмитансами $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m$ (импедансами $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m$) посредством только каскадных и параллельных соединений этих nP-цепей, взаимно-однозначно соответствует некоторое A-выражение $A(\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m)$ адмитанса $\mathbf{Y}$ или обратное ему выражение $A'(\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n)$ импеданса $\mathbf{Z}$ этой цепи.**

По заданному схематичному графическому изображению (схеме) любых каскадных и параллельных соединений m нормальных nP-цепей с адмитансами $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m$ (импедансами $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m$) мы можем написать однозначно соответствующее данной схеме A-выражение $A(\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m)$ адмитанса $\mathbf{Y}$ или A-выражение $A'(\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m)$ импеданса $\mathbf{Z}$ этой схемы. Наоборот, по заданному A-выражению $A(\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m)$ адмитанса $\mathbf{Y}$ или A-выражению $A'(\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m)$ импеданса Z схемы мы можем вполне однозначно начертить ее. Например, по A-выражению $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \bullet \mathbf{Y}_3$ адмитанса $\mathbf{Y}$ видно, что соответствующая этому выражению схема является параллельным соединением нормальной nP-цепи, имеющей адмитанс $\mathbf{Y}_1$, с каскадным соединением двух нормальных nP-цепей с адмитансами $\mathbf{Y}_2$ и $\mathbf{Y}_3$. В силу формулы (29) полученное соединение трех нормальных nP-цепей является нормальной nP-цепью, описываемой кортежем $(Y_{11}+Y_{21} \bullet Y_{31}, \ldots, Y_{1n}+Y_{2n} \bullet Y_{3n})$ адмитансов или, столь же однозначно, кортежем импедансов

$$(Z_{11} \bullet (Z_{21} + Z_{31}), \ldots, Z_{1n} \bullet (Z_{2n} + Z_{3n})).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестаков В. И. ЖТФ, 1941, т. XI, вып. 6, 532.
2. Карни Ш. Теория цепей. М., 1973.
3. Математ. энциклопедия. М., 1977, «Величина».
4. Шестаков В. И. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1977, № 2, 11.

Кафедра
общей физики для физфака

Поступила в редакцию
22.02.78