УДК 536.75

И. К. КУДРЯВЦЕВ, А. С. ШУМОВСКИЙ

# О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ГАМИЛЬТОНИАНЕ В МОДЕЛИ ДИККЕ ПРИ УЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ РЕШЕТКИ

В последнее время значительное внимание уделяется изучению эффектов при взаимодействии вещества с мощными когерентными полями, создаваемыми лазерным излучением [1]. Простейшая модель, сформулированная для этой цели, описывается гамильтонианом вида (модель Дикке [2]),

$$H_D=\omega_0 a_0^+ a_0+\frac{\omega_0}{2}\sum_l \sigma_l^z+\frac{\lambda}{2\sqrt{N}}\sum_{l'}(a_0\sigma_l^+ + a_0^+\sigma_l^-), \tag{1}$$

где $a_0^+$ $(a_0)$ — оператор рождения (уничтожения) фотона с частотой $\omega_0$, $\sigma_l^{\pm}=\frac{1}{2}(\sigma_l^x \pm i\sigma_l^y)$, $\sigma_l^\alpha$ — соответствующая компонента оператора спина Паули, $N$ — число двухуровневых атомов, расположенных в узлах пространственной решетки, и $\lambda$ — вещественный положительный параметр, задающий взаимодействие «излучения с веществом». Точное решение задачи с гамильтонианом (1) было получено в работе [3], а также в работе [4] на основе метода аппроксимирующих гамильтонианов Н. Н. Боголюбова (мл.) [5, 6]. В ряде недавних работ [7—10] исследовался вопрос о влиянии колебаний решетки и пространственных изменений электромагнитного поля на решетке в модельной задаче (1). Однако точное решение было построено только в работах [10] для специального случая коротковолнового электромагнитного излучения с длиной волны, равной двум постоянным решетки.

В настоящей работе мы найдем точное решение, соответствующее случаю длинноволновых (оптических) фотонов. Заметим, что в длинноволновом пределе взаимодействие излучения с веществом в (1) практически не зависит от смещения атомов [8]. Поэтому для того, чтобы учесть макроскопическое влияние колебаний решетки, дополним гамильтониан (1) членом

$$H_P=-\frac{1}{N}\sum_{l,l'}\Phi(l,l')\,\sigma_l^+\sigma_{l'}^-, \tag{2}$$

соответствующим эффективному взаимодействию между диполями с интенсивностью $\Phi(l,l')=\Phi(|l-l'|)$, где $\Phi(\cdot)$ — ограниченная функция. Физически появление этого члена можно объяснить поляризацией атомов в электромагнитном поле.

В связи с введением в гамильтониан (1) «поляризационного» члена (2) сделаем следующее замечание. Если $\forall\, l,\ l'$ $\Phi(l,\ l')<0$, то при определенном выборе $\Phi(\cdot)$ в системе $H_D+H_P$ будет происходить компенсация перехода в сверхизлучающее состояние. Действительно, как показано в (4), при соответствующей перенормировке фотонов гамильтониан (1) может быть тождественным образом представлен в виде

$$H_D=\widetilde{H}_{\text{фот}}-\frac{\lambda^2}{4N\omega_0}\sum_{l,l'}\sigma_l^+\sigma_{l'}^- + \frac{\omega_0}{2}\sum_l \sigma_l^z, \tag{3}$$

где $\widetilde{H}_{фот}$ — гамильтониан свободных перенормированных фотонов. Поэтому при $\Phi(l, l') + \frac{\lambda^2}{4\omega_0} = 0$, $\Phi(\cdot) < 0$, добавление выражения (2) в (3) приведет к сокращению членов, соответствующих эффективному диполь-дипольному взаимодействию, т. е. к отсутствию перехода в сверхизлучающее состояние.

Рассмотрим случай, когда $\forall l,\ l'$ $\Phi(l, l') > 0$ $(\Phi(\cdot) \neq \mathrm{const})$. Считая, что атомы совершают гармонические колебания относительно узлов решетки $(l \to R_l = l + u_l)$, разложим $\Phi(\cdot)$ по относительным смещениям $(u_l - u_{l'})$ атомов из положений равновесия и, ограничиваясь линейным приближением, перейдем к представлению вторичного квантования [11]. В результате получим оператор диполь-фононного взаимодействия в виде

$$H_{d\text{-фон}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l,l'} \sum_k \sigma_l^+ \sigma_{l'}^- \left[B_k(l, l')(b_{-k}^{\pm} + b_k) + B_k^*(l, l')(b_k^+ + b_{-k})\right], \tag{4}$$

где

$$B_k(l, l') = \frac{-i}{N^2 \sqrt{2M\Omega_k}} \sum_\nu \mathbf{e}_k \nu \Phi(\nu) e^{i(\nu, l-l')} (e^{ikl} - e^{ikl'}),$$

(пояснение обозначений см. в работе [12]).

Подчеркнем, что в (4) содержится конечное число фононных мод, что соответствует некоторому макроскопическому заполнению в фононной подсистеме. Подобное рассмотрение представляется целесообразным при рассмотрении резонансных эффектов, что отмечалось, в частности, в работах [9, 10, 13].

Вклад в термодинамику полной системы за счет взаимодействия, имеющего ту же операторную структуру, что и (4), рассматривался нами математически строго на основе метода аппроксимирующих гамильтонианов в работах [12, 14].

Принимая во внимание результаты указанных работ, сопоставим гамильтониану $H_P + H_{d\text{-фон}} + H_{фон}$ термодинамически эквивалентную форму вида

$$\widetilde{H}_{фон} - \frac{1}{N} \sum_{l,l'} \Phi(l, l') \sigma_l^+ \sigma_{l'}^- - 2 \sum_k \frac{N}{\Omega_k} (\eta_k^* P_k + \eta_k P_k^+) + 2 \sum_k \frac{N}{\Omega_k} \eta_k^* \eta_k,$$

$$P_k \equiv \frac{1}{N} \sum_{l,l'} B_k^*(l, l') \sigma_l^+ \sigma_{l'}^-, \quad \eta_k = \langle P_k \rangle, \tag{5}$$

соответствующего перенормировке «поляризационного» взаимодействия. Укажем, что при этом происходит перенормировка свободных фононов:

$$H_{фон} \to \widetilde{H}_{фон} \equiv \sum_k \Omega_k \widetilde{b}_k^+ \widetilde{b}_k, \quad \widetilde{b}_k = b_k + \frac{\sqrt{N}}{\Omega_k} \eta_k^*$$

(член, соответствующий энергии свободных фононов, вводится в полный гамильтониан при построении фононного разложения).

Оператор (5) имеет ту же структуру, что и квазиспиновая часть в (3). Поэтому эквивалентная форма полного гамильтониана может быть представлена в виде

$$H_{\text{тэг}} = \tilde{H}_{\text{фот}} + \tilde{H}_{\text{фон}} + \frac{\omega_0}{2}\sum_l \sigma_l^z - \sum_{l,l'}\left[\frac{\Phi(l,l')}{N} + \frac{\lambda^2}{4N\omega_0} + \right.$$

$$\left. + 4\sum_k \frac{1}{\Omega_k}\operatorname{Re}(\overset{*}{\eta}_k B_k(l,l'))\right]\sigma_l^+\sigma_{l'}^- + 2\sum_k \frac{N}{\Omega_k}\overset{*}{\eta}_k\eta_k. \qquad (6)$$

Гамильтониан (6) представляет собой прямую сумму операторов, описывающих энергии фотонной, фононной и дипольной подсистем, каждый из которых вносит независимый вклад в термодинамику полной системы, причем вклад за счет первых двух членов имеет порядок $0(1/N)\to 0$, $N\to\infty$. Термодинамика дипольной подсистемы в (6) может быть рассмотрена строго в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов, распространенного на квазиспиновые системы [15]. Таким образом, квазиспиновая подсистема в (6) позволяет определить точное термодинамическое поведение полной системы двухуровневых атомов, взаимодействующих с длинноволновым электромагнитным полем с учетом поляризации и гармонических колебаний в твердом теле.

Авторы приносят благодарность Н. Н. Боголюбову (мл.) за научное руководство и поддержку, а также В. А. Загребнову за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Резонансные взаимодействия света с веществом. М., 1977.
2. Dicke R. H. «Phys. Rev.», 1954, **93**, 99.
3. Hepp K., Lieb E. H. «Ann. Phys.», 1973, **76**, 360.
4. Загребнов В. А., Бранков Й. Г., Тончев Н. С. «ДАН СССР», 1975, **225**. 71.
5. Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М., 1974.
6. Bogolubov N. N. (Jr.), Plechko V. N. Preprint IC/75/68, Miramare—Trieste, 1975.
7. Wang Y. K., Hioe F. T. «Phys. Rev.», 1973, **A7**, 831.
8. Hioe F. T. «Phys. Rev.», 1974, **A8**, 1440.
9. Thompson B. V. «J. Phys.», 1975, **A8**, 126.
10. Загребнов В. А., Клемм А. Препринты E17-9600 и P17-10249. Дубна, 1976.
11. Марадудин А., Монтролл Э., Вейс Дж. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М., 1965.
12. Кудрявцев И. К., Шумовский А. С. «ДАН СССР», 1977, **232**, 1293.
13. Ермилов А. Н., Курбатов А. М. Препринт P17-10247. Дубна, 1976.
14. Kudrjavtsev I. K., Shumovsky A. S. «Phys. Let.», 1977, **62A**, 253.
15. Боголюбов Н. Н. (мл.), Шумовская А. Г., Шумовский А. С. «Теор. и мат. физ.», 1976, **29**, 388.

Кафедра
квантовой статистики

Поступила в редакцию
07.04.78

УДК 539.219.1:530.145

**Ш. Н. ГИФЕЙСМАН**

# ПРЯМОЙ РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛА ПО ТРАЕКТОРИЯМ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ

Проблема применения метода интегралов по траекториям в теории упорядоченных полупроводников детально анализируется в [1]. Там показано, что усредненная по случайному полю запаздывающая одно-