ностью до множителя $2^{-3/2}$ переходит в формулу (2.7) работы [3]. Формула (17) нам представляется правильной, поскольку она приводит к верному результату при $w \to 0$.

Подставляя в (17) явное выражение для w, находим окончательно

$$G(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, 0) = \theta(t) \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{3/2} \frac{\left[\frac{\alpha t}{2} \sqrt{\frac{\psi_1 t}{m\hbar}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right]^3}{\sin^3 \left[\frac{\alpha t}{2} \sqrt{\frac{\psi_1 t}{m\hbar}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right]} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\psi_1 t^2}{2\hbar^2} + \frac{\alpha}{4\hbar} \sqrt{\frac{m\psi_1 t}{\hbar}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \times\right.$$

$$\left.\times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \operatorname{ctg}\left[\frac{\alpha t}{2} \sqrt{\frac{\psi_1 t}{m\hbar}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right]\right\}. \quad (18)$$

Автор выражает глубокую благодарность В. Л. Бонч-Бруевичу за предложенную тему и стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонч-Бруевич В. Л., Миронов А. Г. Введение в электронную теорию неупорядоченных полупроводников. М., 1972.
2. Bezák V. «Proc. Roy. Soc.», 1970, A315, 339; «J. Phys. A: Gen. Phys.», 1971, 4, 324.
3. Paradopoulos G. J. «J. Phys. A: Gen. Phys.», 1974, 7, 183.
4. Zimmerman R. L. «J. Math. Phys.», 1965, 6, 1117.

Кафедра
физики полупроводников

Поступила в редакцию
03.03.78

УДК 536.758; 539.2.01

И. И. ОЛЬХОВСКИЙ

ОБ УЧЕТЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОГО КРИСТАЛЛА ОТ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УЗЛАМИ

1. Система уравнений Боголюбова [1] при температуре $\theta \to 0$ имеет «решетчатое» решение, например унарная и бинарная функции выражаются соответственно через трехмерную и шестимерную δ-функции:

$$F_1^{(0)} = \sum_i \delta_{i1}, \quad F_2^{(0)} = \sum_{i \neq j} \delta_{i1}\delta_{j2}, \quad (1)$$

где $\delta_{i1} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_i)$, $\delta_{j2} = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_j)$, а $\mathbf{R}_i$ — радиус-вектор i-го узла решетки. Функция $F_1^{(0)}$ вида (1) впервые была получена из стационарного уравнения Власова [2] как асимптотическое решение при $\theta \to 0$. Соответствующее термическое уравнение состояния было найдено раньше [3]. Как решение нулевого приближения системы Боголюбова функции (1) были получены в [4], где использовалось разложение функционала, соответствующего функции распределения F_s, в ряд по температуре, и, следовательно, разложение

$$F_s = F_s^{(0)} + \theta F_s^{(1)} + \dots . \tag{2}$$

В [4] было получено решение первого приближения с помощью нормальных координат в виде квадратур от неизвестных функций, которые должны быть определены из теории линейных колебаний неограниченного кристалла *. В [5] было получено другое решение, куда входила бесконечная матрица, обратная матрице вторых производных потенциальной энергии кристалла. В [6] для решения интегральных уравнений, полученных при использовании разложения (2), была применена теорема об обобщенных функциях [7]

$$f\delta^{(n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} = f_0\delta^{(n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n} - \sum (f^{(1)}_{\alpha_i})_0\,\delta^{(n-1)}_{\alpha_2\dots\alpha_n} + \dots + (-1)^n (f^{(n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n})_0\,\delta, \tag{3}$$

где f — непрерывная функция, а $\delta^{(n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ определена как

$$\int f(\mathbf{r})\,\delta^{(n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = (-1)^n (f^{(n)}_{\alpha_1\dots\alpha_n})_0\,\Delta V \quad (\Delta V = V/N). \tag{4}$$

Применение (3), а также условий ослабления корреляции позволило получить решения как в линейном [6], так и в нелинейных приближениях [8, 9]. В результате уравнения состояния трехмерного кристалла были получены в [6, 8, 9] в виде решеточных сумм от производных энергии Φ взаимодействия между атомами. Однако в [6, 8, 9] было сделано допущение о независимости коэффициентов функции распределения от расстояния R_{ij} между узлами кристалла. Это привело к решениям, содержащим лишь члены, связанные с производными δ-функций четного порядка.

2. Будем искать решение системы двух интегральных уравнений для бинарной и тернарной функций первого приближения, т. е. решение системы

$$n\int \frac{\partial \Phi_{1,s+1}}{\partial x_1^{\nu}} F^{(1)}_{s+1} d\mathbf{r}_{s+1} + \frac{\partial U_s}{\partial x_1^{\nu}} F_s^{(1)} + \frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial x_1^{\nu}} = 0 \quad (s = 1, 2), \tag{5}$$

где $n = N/V$, $U_1 = 0$, $U_2 = \Phi_{12}$.

Пусть решение для $F_2^{(1)}$ имеет вид

$$F_2^{(1)} = \sum_{i \neq j} P_{12}\left(B^{\alpha}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}} + C^{\alpha\beta}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}} + D^{\alpha\beta}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}\right)\delta_{i1}\delta_{j2}, \tag{6}$$

где P_{12} обозначает сумму, получаемую в результате перестановки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Из (6) следует, что

$$F_1^{(1)} = \sum_i \left(B^{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}} + C^{\alpha\beta}_i \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}}\right)\delta_{i1}, \tag{7}$$

где $B^{\alpha}_i = \sum_{j(j\neq i)} B^{\alpha}_{ij}/N$, $C^{\alpha\beta}_i = \sum_{j(j\neq i)} C^{\alpha\beta}_{ij}/N$ (N — число атомов кристалла).

---

* До сих пор автор не мог сослаться на эти результаты из [4], поскольку ознакомился с ними после опубликования [6, 8, 9].

Ввиду трансляционной инвариантности и условия ослабления корреляции

$$B_{ij}^{\alpha}|_{R_{ij}=\infty}=B_i^{\alpha}=B^{\alpha},\ \ C_{ij}^{\alpha\beta}|_{R_{ij}=\infty}=C_i^{\alpha\beta}=C^{\alpha\beta},\ \ D_{ij}^{\alpha\beta}|_{R_{ij}=\infty}=0. \tag{8}$$

Поэтому положим

$$\overline{B}_{ij}^{\alpha}=B^{\alpha}+b_{ij}^{\alpha},\ \ C_{ij}^{\alpha\beta}=C^{\alpha\beta}+c_{ij}^{\alpha\beta},\ \ D_{ij}^{\alpha\beta}=d_{ij}^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

где $b_{ij}^{\alpha}|_{\infty}=0,\ c_{ij}^{\alpha\beta}|_{\infty}=0$.

Согласно (1), (6), (7) парная корреляционная функция в нулевом приближении $g_2^{(0)}=-\sum\limits_i\delta_{i1}\delta_{i2}$, а в первом

$$g_2^{(1)}=P_{12}\left\{-\sum_i\left(B^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}}+C^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}}\right)\delta_{i1}\delta_{i2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i\neq j}\left(b_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}}+c_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}}+d_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}\right)\delta_{i1}\delta_{j2}\right\}. \tag{10}$$

Следовательно, $F_2^{(0)}$ мультипликативно везде, кроме точек $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$, и в этом смысле «самосогласованно». В $g_2^{(1)}$ первая сумма связана с самосогласованным приближением, а вторая обращается в нуль лишь на бесконечности. Аналогично положим, что $g_3^{(1)}=\overline{g}_3^{(1)}+\Delta g_3^{(1)}$, где $\overline{g}_3^{(1)}$ — тернарная корреляционная функция в самосогласованном приближении, а $\Delta g_3^{(1)}$ — остальная часть функции. Используя $F_1^{(0)}$ из (1), а также (7) и (10), найдем вид тернарной функции

$$F_3^{(1)}=\sum_{i\neq j\neq k}\left\{B^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}}+\frac{\partial}{\partial x_2^{\alpha}}+\frac{\partial}{\partial x_3^{\alpha}}\right)+\right.$$
$$+C^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^{\alpha}\partial x_3^{\beta}}\right)+$$
$$+P_{23}\left(b_{jk}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2^{\alpha}}+c_{jk}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}+d_{jk}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\alpha}\partial x_3^{\beta}}\right)+$$
$$+P_{13}\left(b_{ik}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}}+c_{ik}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}}+d_{ik}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_3^{\beta}}\right)+$$
$$\left.+P_{12}\left(b_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}}+c_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_1^{\beta}}+d_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}\right)\right\}\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}+\Delta g_3^{(1)}. \tag{11}$$

3. Подставим (1), (6) и (11) в (5) и применим (3), (4). Тогда из (5) при $s=1$ получим систему

$$\sum_{j(j\neq i)}\{(b_{ij}^{\alpha}-b_{ji}^{\alpha})\Phi_{ij}^{\alpha\nu}+[(c_{ij}^{\alpha\beta}+c_{ji}^{\beta\alpha})-(d_{ij}^{\alpha\beta}+d_{ji}^{\beta\alpha})]\Phi_{ij}^{\alpha\beta\nu}\}=0, \tag{12}$$

$$\lambda_1(C^{\alpha\nu}+C^{\nu\alpha})+\sum_{j(j\neq i)}\{b_{ij}^{\alpha}\Phi_{ij}^{\nu}+[(c_{ij}^{\alpha\beta}+c_{ij}^{\beta\alpha})-(d_{ij}^{\alpha\beta}+d_{ji}^{\beta\alpha})]\Phi_{ij}^{\beta\nu}\}=\delta^{\alpha\nu}, \tag{13}$$

$$\sum_{j(j\neq i)} c_{ij}^{\alpha\beta}\Phi_{ij}^{\nu}=0 \qquad \Big(\lambda_1=\sum_{j(j\neq i)}\Phi_{ij}^{\alpha\alpha}\Big). \tag{14}$$

Из (4) следует, что $C^{\alpha\beta}=C\delta^{\alpha\beta}$, а (13) и (15) удовлетворяются, если

$$b_{ij}^{\alpha}=b_1\Phi_{ij}^{\alpha}+\ldots,\quad c_{ij}^{\alpha\beta}=c_1\Phi_{ij}^{\alpha\beta}+\ldots,\quad d_{ij}^{\alpha\beta}=d_1\Phi_{ij}^{\alpha\beta}+\ldots, \tag{15}$$

где неизвестные коэффициенты $b_1, c_1, d_1, \ldots$ зависят лишь от объема, а суммы состоят из всевозможных членов, являющихся функционалами производных энергии Φ соответствующей тензорной структуры (вид коэффициентов (15) также соответствует тензорной структуре (13)). Используя симметрию и антисимметрию коэффициентов (15) и связанные с этим свойства решеточных сумм, положим $B^{\alpha}=0$, а из (5) при $s=2$ получим систему уравнений (пренебрегая при этом членами с $\Delta g_3^{(1)}$). В частности, получим, что $b_{ij}^{\alpha}\Phi_{ij}^{\nu}=0$, $c_{ij}^{\alpha\beta}\Phi_{ij}^{\nu}=0$, откуда $b_{ij}^{\alpha}=0$, $c_{ij}^{\alpha\beta}=0$. Тогда (13) и остальные уравнения системы при $s=2$ сводятся к

$$2\lambda_1 C\,\delta^{\alpha\nu}-2\sum_{j(j\neq i)} d_{ij}^{\alpha\beta}\Phi_{ij}^{\beta\nu}=\delta^{\alpha\nu}, \tag{16}$$

$$C\,\Phi_{ij}^{\alpha\nu}-\lambda_1 d_{ij}^{\alpha\nu}+\sum_{k(k\neq i,j)} d_{jk}^{\alpha\beta}\Phi_{ik}^{\beta\nu}=0. \tag{17}$$

Из (17), пренебрегая членом $0(1/N_1^3)$ (N_1 — число ближайших соседей), и из (16) найдем

$$C=1/2\lambda_1(1-\Delta\lambda_1/\lambda_1),\qquad d_{ij}^{\alpha\beta}=C\Phi_{ij}^{\alpha\beta}/\lambda_1, \tag{18}$$

где $\Delta\lambda_1=\sum_{j(j\neq i)\beta}(\Phi_{ij}^{\alpha\beta})^2/\lambda_1$. Заметим, что вкладу, связанному с $\Delta g_3^{(1)}$, по-видимому, соответствуют члены, в частности, вида

$$\Phi_{ij}^{\alpha\beta}\,\Phi_{ik}^{\nu\mu}\,\Phi_{jk}^{\varkappa\varepsilon}/\lambda_1^3\sim 0(1/N_1^3).$$

4. Учитывая решение (18), из (6) и (7) получим

$$F_2^{(1)}=\sum_{i\neq j}P_{12}\left(C\frac{\partial^2}{(\partial x_1^{\alpha})^2}+d_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\alpha}\,\partial x_2^{\beta}}\right)\delta_{i1}\,\delta_{j2},\quad F_1^{(1)}=C\sum_i\frac{\partial^2\delta_{i1}}{(\partial x_1^{\alpha})^2}, \tag{19}$$

а из известных формул [1] найдем уравнения состояния

$$E=Ne^{(0)}+3N\theta,\quad p=p^{(0)}+n\theta\,\frac{(2\lambda_1-\varkappa_1)-(2\Delta\lambda_1-\Delta\varkappa_1)}{2(\lambda_1-\Delta\lambda_1)}, \tag{20}$$

где

$$\varkappa_1=\sum_{j(j\neq i)}(r\Phi')_{ij}^{\alpha\alpha},\quad \Delta\varkappa_1=\sum_{j(j\neq i)\beta}\Phi_{ij}^{\alpha\beta}(r\Phi')_{ij}^{\alpha\beta}/\lambda_1. \tag{21}$$

Если в (18)—(19) пренебречь членами $0(1/N_1^2)$, получим результаты [6], а пренебрегая в (20), $\Delta\lambda$, $\Delta\varkappa_1$ и ограничиваясь учетом ближайших соседей, получим термическое уравнение состояния в квазигармоническом приближении [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., 1946.
2. Власов А. А. «Вестн. Моск. ун-та», 1946, № 3—4, 63—96; Теория многих частиц. М.—Л., 1950.
3. Gruneisen E. «Handbuch. d. Phys.», 1926, **10**, 1.
4. Тябликов С. В. Канд. дис. МГУ, 1947.
5. Lewis R. M., Keller J. B. «Phys. Rev.», 1961, **121**, N 4, 1022—1037.
6. Ольховский И. И. «ДАН СССР», 1973, **208**, 808; 1975, **221**, 1063; «Теор. и мат. физ.», 1973, **15**, 382; 1975, **23**, 399.
7. Schwartz L. Theorie des distributions, t. 1, 2, 1950, 1951.
8. Ольховский И. И. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 1, 14.
9. Ольховский И. И., Экелекян В. Л. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 11, 60.
10. Базаров И. П. Статистическая теория кристаллического состояния. М., 1972.

Кафедра
теоретической физики

Поступила в редакцию
12.01.79

УДК 621.373.029.7

Ю. Д. ГОЛЯЕВ, К. Н. ЕВТЮХОВ, Л. Н. КАПЦОВ

РЕЖИМ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ГЕНЕРАЦИИ В НЕПРЕРЫВНОМ КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗАРЕ НА YAG : Nd^{3+} С НЕПЛОСКИМ РЕЗОНАТОРОМ

Кольцевые газовые лазеры с неплоскими резонаторами обладают рядом новых свойств по сравнению с линейными или плоскими кольцевыми лазерами [1]. В последнее время изучается возможность использования неплоских кольцевых резонаторов в твердотельных лазерах. Так, в работе [2] показано, что применение неплоского резонатора позволяет увеличить объем рабочей части кристалла в режиме генерации основной поперечной моды и облегчает выделение этой моды. Отмечается также увеличение устойчивости неплоского резонатора к разъюстировкам.

В данной работе обсуждается возможность получения однонаправленной и одномодовой (по продольному индексу) генерации в непрерывном кольцевом лазере на YAG : Nd^{3+} за счет введения неплоскостности резонатора. Это подтверждается экспериментально.

Основной причиной наличия в спектре генерации твердотельных лазеров нескольких продольных мод является пространственная неоднородность инверсии. При сглаживании инверсии в средах с однородным уширением линии люминесценции число мод уменьшается до одной [3, 4]. (В частности, в работе [4] это достигалось путем придания встречным волнам круговой поляризации.) Получалось это с помощью размещения фазовых пластинок $\lambda/4$ по обеим сторонам от активного элемента. Так как встречные волны с противоположным направлением вращения электрических векторов не интерферируют, то неоднородность в инверсии активной среды не возникает.

В кольцевых неплоских лазерах, как газовых, так и твердотельных, собственные поляризации встречных волн в общем случае эллиптические [1], однако при определенных условиях они могут быть близкими к круговым с противоположным направлением вращения электрических векторов. В качестве примера рассмотрим резонатор в виде «объемной восьмерки» (рис. 1), удобной для экспериментальных исследований.