

УДК 530.145

С. В. БУДНИК, Д. А. СЛАВНОВ

ГРАДИЕНТНО ИНВАРИАНТНЫЕ КОНТРЧЛЕНЫ
В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В настоящее время большой интерес вызывают исследования конструктивных моделей, обладающих некоторыми дополнительными симметриями (калибровочной, киральной, суперсимметрией). Непременным условием успешного использования таких моделей является построение регуляризационной процедуры, совместимой с указанными симметриями.

Частным случаем калибровочной инвариантности является градиентная инвариантность (ГИ), а простейшим примером градиентно инвариантной теории — квантовая электродинамика. Ренормировочное преобразование, последовательно обеспечивающее на всех промежуточных этапах ГИ S -матрицы в электродинамике, давно построено. Оно описано, например, в [1] и основано на использовании специального варианта регуляризации Паули — Вилларса (РПВ) [2] — так называемой регуляризации по циклам.

Между тем в работе [3] было обращено внимание на то, что при использовании РПВ по циклам отдельные контрчлены, построенные по рецептам R -операции Боголюбова — Парасюка [4—6], оказываются расходящимися даже при наличии промежуточной регуляризации. Таким образом, возникает вопрос о возможности корректно совместить требования ГИ с R -операцией.

В настоящей работе как раз и построена такая модификация R -операции ($\hat{R}$ -операция), которая обеспечивает не только конечность результата перенормировки, но и отсутствие ультрафиолетовых расходимостей на всех промежуточных этапах при использовании РПВ по циклам в квантовой электродинамике.

Условимся о некоторых обозначениях. Ковариантная регуляризация причинной функции по Хеппу [7], заключается во введении параметра $r > 0$, обрезающего на нижнем пределе интеграл по a в известном α -представлении свертки. Регуляризация по Хеппу нарушает ГИ S -матрицы в электродинамике. В качестве инвариантной промежуточной регуляризации мы будем использовать РПВ. Последняя состоит, во-первых, в замене каждого произведения спинорных свертки $S^c(k, m)$ соответствующего замкнутому спинорному циклу, суммой произведений

$$\sum_{i \geq 0} C_i \text{Sp} [\gamma S^c(k_1, \mu_i) \cdot \dots \cdot \gamma S^c(k_n, \mu_i)].$$

Здесь коэффициенты C_i удовлетворяют условиям

$$\sum_{i \geq 0} C_i \mu_i^s = 0 \quad (s = 0, \dots, p), \quad (1)$$

причем C_i равномерно по всем μ_i ограничены; $C_0=1$, а $\mu_0=m$ — физическая масса спинорного поля. Во-вторых, каждая фотонная свертка $D_0^c(k, 0)$ заменяется на сумму $\tilde{D}_0^c(k, \nu)$ сверток с массами ν_j ($\nu_0=0$), а весовые коэффициенты суммы удовлетворяют соотношениям типа (1).

Обозначим перенормированную фейнмановскую амплитуду $\tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu)$, если она регуляризована одновременно и с помощью РПВ, и по Хеппу, причем $r=0$ или $\nu=\infty$ будет означать отсутствие соответственно регуляризации по Хеппу или РПВ фотонных линий, что согласуется со способом снятия этих регуляризаций предельными переходами $r \rightarrow 0$, $\nu_j \rightarrow \infty$ при $j \geq 1$. $\tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu)$ есть сумма амплитуд $J(r, \{\mu_i, \mu_i, \dots\}, \nu)$, имеющих массу μ_{i_k} в пропагаторах k -того спинорного цикла.

Для того чтобы в окончательных выражениях можно было снять промежуточные регуляризации, вводимые с помощью параметров r, μ, ν , как известно, каждый фейнмановский граф G , вообще говоря, должен быть подвергнут перенормировке. Оператор, осуществляющий такую перенормировку согласно процедуре Боголюбова — Парасюка [4–6], мы обозначим через R . Он стандартным образом [8] выражается через операторы M_g , которые заменяют в импульсном представлении коэффициентные функции расходящихся подграфов g графа G суммой нужного числа первых членов их разложения в ряд Маклорена. Далее контрчленом к коэффициентной функции J_G графа G будем называть результат действия некоторого произведения операторов $(-M_g)$ на J_G .

Построение градиентно инвариантных контрчленов. В работе [3] приведен пример простейшего графа G (рис. 1), который дает представление о трудностях, возникающих при попытке совместить РПВ по циклам и R -операцию. Рассмотрим контрчлен $M_g \tilde{J}_G(0, \{\mu\}, \nu)$, где g — подграф, обведенный на рис. 1 пунктирной линией. После вычисления интеграла по l мы будем иметь

$$M_g \tilde{J}_G(0, \{\mu\}, \nu) = \int dq \sum_{i \geq 0} C_i \text{Sp} [\gamma S^c(q, \mu_i) \gamma \times \\ \times (a_1(\nu) + a_2(\nu) \ln(\mu_i/m)) S^c(q+k, \mu_i)]. \quad (2)$$

Наличие в (2) $\ln \mu_i$ нарушает эффективную работу регуляризующей суммы $\sum_i C_i$ (т. е. РПВ), в результате чего интеграл по g в (2) расходуется в ультрафиолетовой области, несмотря на $\mu_i, \nu < \infty$.

Очевидно, что подобные затруднения встретятся и в высших порядках теории возмущений. Мы столкнемся с ними всюду, где подграфы типа Σ — собственной энергии спинора или Γ — вершинной части (как в примере выше) будут частично содержать некоторый спинорный цикл.

Чтобы обойти эту трудность, введем в рассмотрение $\hat{R}$ -операцию, которая получается из стандартной R -операции Боголюбова — Парасюка заменой всех операторов M_g на $\hat{M}_g$. Последние отличаются от M_g тем, что для g , содержащего незамкнутую спинорную линию с некоторой массой μ_i во всех ее пропагаторах, производят замену $\mu_i \rightarrow m$ в этих пропагаторах. Ясно, что лишь для $g=\Sigma, \Gamma$ возможно $M_g \neq \hat{M}_g$.

Фейнмановскую амплитуду J_Γ (J_Σ) графа Γ (Σ) обозначим через $\Gamma(\Sigma)$, если она уже перенормирована R -операцией, за исключением со-

вершения последнего вычитания, связанного с расходимостью самого $\Gamma(\Sigma)$. В наборе спинорных масс $\{\mu\}$, от которых зависят амплитуды Γ и Σ , выделим массу μ' , соответствующую незамкнутой спинорной линии (она одна); остальные массы обозначим μ'' . Тогда

$$\begin{aligned}\hat{M}_\Gamma \Gamma^\alpha(p, k; \{\mu', \mu''\}, \nu) &= M_\Gamma \Gamma^\alpha(p, k; \{m, \mu''\}, \nu) = \\ &= M_\Gamma \Gamma^\alpha(p, k; \{\mu', \mu''\}, \nu) + \gamma^\alpha d_\Gamma(\mu, \nu),\end{aligned}$$

где p, k — внешние импульсы графа Γ^α , а

$$\gamma^\alpha d_\Gamma(\mu, \nu) = \Gamma^\alpha(0, 0; \{m, \mu''\}, \nu) - \Gamma^\alpha(0, 0; \{\mu', \mu''\}, \nu). \quad (3)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\hat{M}_\Sigma \Sigma(k; \{\mu', \mu''\}, \nu) &= M_\Sigma \Sigma(k; \{\mu', \mu''\}, \nu) + \\ &+ d_{1\Sigma}(\mu, \nu) + k_\alpha d_{2\Sigma}^\alpha(\mu, \nu).\end{aligned}$$

Таким образом, операция $\hat{R}$ может рассматриваться как обычная R -операция, в которой помимо операторов M_g фигурируют еще полиномы с коэффициентами $d_{\kappa g}(\mu, \nu)$. Поэтому, если мы введем в рассмотрение еще операцию $R(d)$, в которой контрчлены отличаются от фигурирующих в $\hat{R}$ -операции конечными полиномами с коэффициентами $d_{\kappa g}$, то тогда

$$R(0) = R, \quad R(d(\mu, \nu)) = \hat{R}.$$

ГИ контрчленов R -операции доказывается так же, как и ГИ самой $\tilde{J}(0, \{\mu\}, \nu)$ (см., например, [1]), поскольку в частично редуцированных циклах по-прежнему одна масса стоит во всех не стянутых в точку спинорных пропагаторах. Таким образом, для завершения корректного доказательства (использующего РПВ по циклам в качестве промежуточной регуляризации) ГИ S -матрицы в электродинамике, остается доказать, что введенная нами $\hat{R}$ -операция осуществляет требуемую перенормировку. Эту задачу решает следующая теорема.

Теорема. Амплитуда Фейнмана, регуляризованная на промежуточном этапе с помощью РПВ по циклам и перенормированная $\hat{R}$ -операцией, совпадает с соответствующей амплитудой с промежуточной регуляризацией параметрами r и перенормированной R -операцией:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \hat{R} \tilde{J}(0, \{\mu\}, \nu) = \lim_{r \rightarrow 0} R J(r, \{m, m, \dots\}, \infty). \quad (4)$$

Доказательство теоремы. Доказательство будем вести по индукции: предполагая теорему справедливой для порядка теории возмущений $N-1$, покажем, что она остается в силе и для порядка N . В выполнении (4) для низших порядков можно убедиться явно.

Отметим прежде всего, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} R(d) \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu) = \lim_{r \rightarrow 0} R(d) J(r, \{m, m, \dots\}, \infty). \quad (5)$$

Существование пределов по r в обеих частях (5) следует из теоремы Боголюбова — Парасюка. Справедливость (5) следует из независимости окончательного результата перенормировки с помощью R -операции от способа промежуточной регуляризации.

Дальнейшие рассуждения разобьем на ряд утверждений.

Утверждение 1.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} d_{\text{кг}}(\mu, \nu) \equiv \lim_{\mu \rightarrow \infty} d_{\text{кг}}(\{\mu'_{i_1}; \mu''_{i_2}, \mu''_{i_3}, \dots\}, \nu) = \tilde{d}_{\text{кг}}(\{i_1; i_2, i_3, \dots\}, \nu), \quad (6)$$

$$\tilde{d}_{\text{кг}}(\{0; i_2, i_3, \dots\}, \nu) = 0. \quad (7)$$

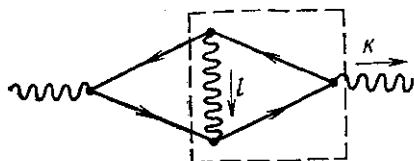


Рис. 1

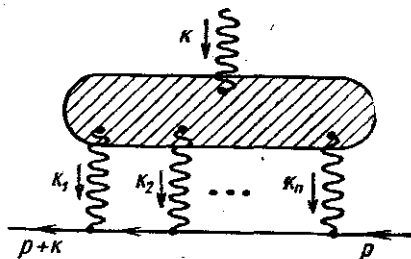


Рис. 2

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $d_{\text{кг}} = d_{\Gamma}$. Равенство (7) — тривиальное следствие (3). Для доказательства (6), опуская вершинные γ -матрицы и числовые множители, запишем фейнмановскую амплитуду $\Gamma(p, k; \{\mu\}, \nu)$ (см. рис. 2) для случая $k_1 + k_2 + \dots + k_n = p = k = 0$ в виде

$$\Gamma(0, 0; \{\mu\}, \nu) = \int \prod_{i=1}^{n-1} dk_i \prod_{i=1}^n \tilde{D}_0^e(k_i, \nu) \prod_{j=2}^n S^e(k_2 + \dots + k_j; \mu'_{i_j}) \times G(k=0, k_1, \dots, k_n; \mu'', \nu). \quad (8)$$

Здесь $G(k, k_1, \dots, k_n; \mu'', \nu)$ — регуляризованная РПВ и перенормированная $R(d(\mu, \nu))$ -операцией фейнмановская амплитуда, соответствующая заштрихованному на рис. 2 графу G с $n+1$ фотонным концом. Отметим также, что возможные отличия графа Γ общего вида от графа, представленного на рис. 2, несущественны для проводимых рассуждений.

Так как в $\Gamma(0, 0; \{\mu\}, \nu)$ внешние импульсы равны нулю, т. е. лежат в евклидовой области, то можно развернуть на 90° все контуры интегрирования по нулевым компонентам внутренних импульсов, не пересекая ни одного полюса. При этом правая часть (8) сохраняет свой вид, однако метрика импульсов станет евклидовой. В силу предположения индукции и (5) $G(k, k_1, \dots, k_n; \mu'' \nu)$ имеет предел при $\mu'' \rightarrow \infty$. Кроме того, при евклидовой метрике $G(\dots; \mu'', \nu)$ мажорируется амплитудой $G(\dots; m, \nu)$. Поэтому подынтегральное выражение в (8) мажорируется величиной

$$\text{const} \prod_{i=1}^n |\tilde{D}_0^e(k_i, \nu)| \prod_{j=2}^n |S^e(k_2 + \dots + k_j; m)| |G(0, k_1, \dots, k_n; m, \nu)|.$$

С помощью РПВ фотонной линии мы можем сделать $\tilde{D}_0^e(k_i, \nu)$ достаточно быстро спадающей при $|k_i| \rightarrow \infty$. В результате оказываются выполненными условия теоремы Лебега, а поэтому, вычисляя предел при $\mu \rightarrow \infty$ от $\Gamma(0, 0; \{\mu\}, \nu)$, можно переходить к пределу в подынтегральном выражении в правой части (8). Отсюда сразу же следует (6).

Утверждение 2. Существуют и равны пределы

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \hat{R} \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} R \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu). \quad (9)$$

Доказательство. Существование пределов в правой части (9) следует из теоремы Боголюбова — Парасюка. Предел по $r \rightarrow 0$ в левой части (9) существует, так как мы не сняли еще РПВ. Кроме того, оператор $R(d)$ зависит от $d_{\text{кг}}$ полиномиально, и поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 0} R(d) J(r, \{\mu\}, \nu) = K_0(\{\mu\}, \nu) + \sum_{j \geq 0} \pi_j(d) K_j(\{\mu\}, \nu), \quad (10)$$

где индекс j нумерует отличающиеся набором сомножителей произведения $\pi_j(d)$ натуральных степеней коэффициентов $d_{\text{кг}}$.

Пусть $d_{\text{кг}}$ не зависят от $\{\mu\}$. Оценка левой части (10) в специальном представлении по Хеппу [7, 9] дает в силу (10) для K_j

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_j(\{\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots\}, \nu) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (11)$$

если хотя бы одно $i_k \neq 0$. Для $R \equiv R(0)$ отсюда следует

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} R \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu) = K_0(\{m, m, \dots\}, \nu). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь $\hat{R} = R(d(\mu, \nu))$. Из (10) для $\tilde{J}$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \hat{R} \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu) &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i_1, i_2, \dots} C_{i_1} C_{i_2} \dots \times \\ &\times [K_0(\{\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots\}, \nu) + \sum_{j \geq 0} \pi_j(d(\mu, \nu)) K_j(\{\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots\}, \nu)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Утверждение 1 вместе с (11) показывает, что в пределе $\mu \rightarrow \infty$ отличные от нуля $\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_j(\{\mu\}, \nu)$ ($j \geq 1$) будут умножаться на равные нулю $\pi_j(\tilde{d}_{\text{кг}}(\{0, 0, \dots\}, \nu))$ и правая часть (13) просто равна $K_0(\{m, m, \dots\}, \nu)$, что с учетом (12) и доказывает утверждение 2.

Отметим далее, что амплитуда $\tilde{J}(0, \{\mu\}, \nu)$ и контрчлены к ней от $\hat{R}$ (но не R !)-операции конечны при $\mu, \nu < \infty$. Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 0} \hat{R} \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu) = \hat{R} \tilde{J}(0, \{\mu\}, \nu). \quad (14)$$

Теперь у нас имеется все для завершения доказательства непосредственно теоремы. Подставим (14) в левую часть (9) и перейдем в обеих частях (9) к пределу $\nu \rightarrow \infty$. Мы получим

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \hat{R} \tilde{J}(0, \{\mu\}, \nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} R \tilde{J}(r, \{\mu\}, \nu),$$

что в силу (5) при $d=0$ и доказывает теорему.

Таким образом, в настоящей работе обоснована возможность последовательно совместить градиентно инвариантную промежуточную регуляризацию и R -операцию в случае электродинамики. Построенная модификация R -операции ($\hat{R}$ -операция) в сочетании с регуляризацией Паули — Вилларса по циклам обеспечивает отсутствие ультрафиоле-

товых расходимостей как в конечном результате вычислений, так и на всех промежуточных этапах.

С другой стороны, оператор $\hat{R}$ сохраняет явную градиентную инвариантность промежуточной регуляризации по циклам. Поэтому имеющаяся в работе теорема доказывает также градиентную инвариантность S -матрицы, перенормированной стандартной R -операцией. Отметим также, что перенос центров вычитаний из нуля в какую-либо другую точку импульсного пространства (например, на массовую поверхность для спинорных собственно энергетических графов) можно провести градиентно инвариантным образом, нужно лишь принять во внимание соответствующие тождества Уорда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1976.
2. Pauli W., Willars F. «Rev. Mod. Phys.», 1949, 21, 434.
3. Чудинovich И. Ю. Деп. в ВИНТИ, № 2696—74. М., 1974.
4. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, 20, 585.
5. Bogoliubov N. N., Parasiuk O. S. «Asta Math.», 1957, 97, 227.
6. Парасюк О. С. «Укр. матем. журнал», 1960, 12, 287.
7. Хепп К. Теория перенормировок. Перев. с франц., под ред. М. К. Поливанова. М., 1974.
8. Завьялов О. И., Степанов Б. М. «Ядерная физика», 1965, 1, 922.
9. Нерр К. «Comm. Math. Phys.», 1966, 2, 301.

НИИЯФ

Поступила в редакцию
29.11.77