УДК 537.86:519

Ю. Е. ДЬЯКОВ

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ СТАЦИОНАРНОГО ШУМА С НЕГАУССОВСКОЙ СТАТИСТИКОЙ

1. В радиофизике и оптике часто используется квазигармоническое представление случайного процесса

$$\xi(t) = \rho(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \tag{1}$$
$$(-\pi < \varphi < \pi,\ \rho > 0),$$

когда он выражается через огибающую ρ, фазу φ и постоянную частоту $\omega_0 \neq 0$. Выражение (1) можно переписать, вводя квадратурные компоненты $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$,

$$\xi(t) = a(t)\cos\omega_0 t - b(t)\sin\omega_0 t, \tag{2}$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(b/a).$$

Общий метод отыскания функции распределения

$$W(\rho_1 \ldots \rho_n\ \varphi_1 \ldots \varphi_n), \tag{3}$$

описывающей вероятности значений огибающей и фазы в n моментов времени $t_1 \ldots t_n$, состоит в том, чтобы, задавшись функцией распределения для квадратурных компонент

$$W(a_1 \ldots a_n\ b_1 \ldots b_n), \tag{4}$$

перейти в (4) к новым переменным: выразив в (4) a_i и b_i через ρ_i и φ_i и домножив на якобиан преобразования, равный $\rho_1 \ldots \rho_n$ [1, с. 349], получим (3). Однако если процесс $\xi(t)$ не является гауссовским, то определение (4) превращается в самостоятельную задачу. Например, даже в одномерном случае, чтобы найти распределение $W(a, b)$, соответствующее данному распределению $W(\xi)$, нужно, как следует из (2), решить интегральное уравнение

$$W(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} W\left(a,\ b = -\frac{\xi - a\cos\omega_0 t}{\sin\omega_0 t}\right)\frac{da}{|\sin\omega_0 t|}. \tag{5}$$

В связи с этими трудностями представляет интерес выяснить, как и при каких условиях распределение (3) может быть найдено непосредственно по распределению

$$W(\xi_1 \ldots \xi_n) \tag{6}$$

самого квазигармонического процесса.

В настоящей работе показано, что эта задача имеет однозначное решение, если процессы ξ, ρ и φ стационарны. В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

2. В одномерном случае решение имеет следующий вид:

$$W(\rho, \varphi) = W(\rho)\frac{1}{2\pi}, \quad W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \tag{7}$$

$$W(\rho) = \rho \int_0^\infty J_0(u\rho)\,\theta(u)\,u du,$$

$$W(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\eta \frac{W(\rho)}{\rho}\Big|_{\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}}. \tag{8}$$

Здесь

$$\theta(u) = \langle e^{iu\xi}\rangle = \int_0^\infty J_0(u\rho)\,W(\rho)\,d\rho - \tag{9}$$

соответствующая $W(\xi)$ характеристическая функция; $J_0(u\rho)$ — функция Бесселя (см., например, [2, с. 310]).

3. Рассмотрим двумерный случай. Покажем, что распределение вероятностей $W(\xi, \xi_\tau)$ и соответствующая характеристическая функция $\theta(u, v)$ являются периодическими функциями «быстрого» времени $\omega_0\tau$:

$$W(\xi, \xi_\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\xi, \xi_\tau)\,e^{im\omega_0\tau}, \tag{10}$$

$$\theta(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m(u, v)\,e^{im\omega_0\tau}; \tag{11}$$

коэффициенты A_m и b_m связаны преобразованием Фурье,

$$B_m(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\xi_\tau A_m(\xi, \xi_\tau)\,e^{iu\xi+iv\xi_\tau}; \tag{12}$$

$$A_m(\xi, \xi_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} B_m(u, v)\,e^{-iu\xi-iv\xi_\tau}\,du\,dv. \tag{13}$$

Действительно, согласно (1)

$$\theta(u, v) = \langle e^{iu\xi+iv\xi_\tau}\rangle =$$

$$= \iint_0^\infty d\rho d\rho_\tau \iint_{-\pi}^{\pi} d\varphi d\varphi_\tau e^{iu\rho\cos(\omega_0 t+\varphi)+iv\rho_\tau\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi_\tau)}\,W(\rho\rho_\tau\varphi\varphi_\tau). \tag{14}$$

Совместное распределение огибающей и фазы всегда можно представить как двойной ряд Фурье:

$$W(\rho\rho_\tau\varphi\varphi_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} V_{kl}(\rho, \rho_\tau)\,e^{-ik\varphi-il\varphi_\tau}. \tag{15}$$

Подставив (15) в (14) и интегрируя по φ и φ_τ, получим

$$\theta(u, v) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty}\sum e^{i(k+l)\omega_0 t} e^{il\omega_0\tau} i^{k+l} \iint_0^\infty d\rho d\rho_\tau V_{kl}(\rho, \rho_\tau) J_k(u\rho) J_l(v\rho_\tau), \quad (16)$$

где J_n — функция Бесселя,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iu\rho\cos(\omega_0 t+\varphi)-im\varphi} d\varphi = 2\pi i^m e^{im\omega_0 t} J_m(u\rho), \quad (17)$$

$$J_{-n}(z) = J_n(-z) = (-1)^n J_n(z). \quad (18)$$

Вследствие стационарности ξ зависимость от t в (16) должна исчезнуть. Это значит, что в (15) отличны от нуля лишь члены с $k+l=0$, т. е.

$$\begin{gathered} V_{-m,m}(\rho, \rho_\tau) = C_m(\rho, \rho_\tau) \neq 0 \quad (k+l=0), \\ V_{kl}(\rho, \rho_\tau) = 0 \quad (k+l \neq 0). \end{gathered} \quad (19)$$

Подставив (19) в (16), получим (11) с

$$B_m(u, v) = (-1)^m \iint_0^\infty C_m(\rho, \rho_\tau) J_m(u\rho) J_m(v\rho_\tau) d\rho d\rho_\tau. \quad (20)$$

Так как $J_m(-x)J_m(-y) = J_m(x)J_m(y)$, то согласно (20)

$$B_m(-u, -v) = B_m(u, v),$$

откуда следует четность и вещественность двумерной характеристической функции

$$\theta(-u, -v) = \theta(u, v) = \theta^*(u, v). \quad (21)$$

Аналогичный вывод может быть сделан и для одномерной характеристической функции: согласно (9)

$$\theta(-u) = \theta(u) = \theta^*(u) = 2\int_0^\infty \cos u\xi W(\xi) d\xi. \quad (22)$$

Из (21) и (22) с необходимостью вытекает четность распределений квазигармонического стационарного процесса (1):

$$W(\xi) = W(-\xi), \quad W(\xi, \xi_\tau) = W(-\xi, -\xi_\tau). \quad (23)$$

4. Как следует из (15) и (19),

$$W(\rho\rho_\tau\varphi\varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\left[C_0(\rho, \rho_\tau) + \sum_m{}' C_m(\rho, \rho_\tau) e^{im(\varphi-\varphi_\tau)}\right], \quad (24)$$

причем коэффициенты C_m однозначно определяются коэффициентами B_m в (11) с помощью преобразования Ганкеля, обратного (20):

$$C_m(\rho, \rho_\tau) = \rho\rho_\tau(-1)^m \iint_0^\infty B_m(u, v) J_m(u\rho) J_m(v\rho_\tau) uv du dv. \quad (25)$$

Выражения (24) и (25) вместе с (10) и (11) дают общее решение задачи об определении двумерной статистики огибающей и фазы процесса (1), если известны характеристическая функция $\theta(u, v)$ или распределение вероятности $W(\xi, \xi_\tau)$ этого процесса. Ясно также, как получить решение обратной задачи: по заданному совместному распределению огибающей и фазы найти $\theta(u, v)$ или $W(\xi, \xi_\tau)$. Для этого нужно подставить C_m в (20) и найти B_m, а затем и A_m, используя (13). Подставив результаты в (10) и (11), получим $\theta(u, v)$ и $W(\xi, \xi_\tau)$ в виде разложений по гармоникам «быстрого» времени $\omega_0\tau$.

5. После интегрирования (24) по φ и φ_τ остается только нулевой член ряда, который и определяет двумерное распределение огибающей:

$$W(\rho, \rho_\tau) = C_0(\rho, \rho_\tau) = \rho\rho_\tau \iint\limits_0^\infty B_0(u, v) J_0(u\rho) J_0(v\rho_\tau) uvdudv. \qquad (26)$$

Проинтегрировав (24) по ρ и ρ_τ, получим соответственно двумерное распределение фазы

$$W(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\left[1 + \sum_m{}' D_m(\tau) e^{im(\varphi-\varphi_\tau)}\right], \qquad (27)$$

где коэффициенты

$$D_m(\tau) = \iint\limits_0^\infty C_m(\rho, \rho_\tau) d\rho d\rho_\tau = \langle e^{-im(\varphi-\varphi_\tau)}\rangle \qquad (28)$$

должны удовлетворять условиям:

$$\begin{gathered} D_m(0) = 1, \quad D_m(\infty) = 0, \\ D_{-m}(\tau) = D_m^*(\tau), \\ \operatorname{Re} D_m(\tau), \quad \operatorname{Im} D_m(\tau) \leqslant 1. \end{gathered} \qquad (29$$

Ввиду простоты (29) нетрудно получить различные модели двумерных распределений (27).

6. Из (24) можно сделать ряд общих выводов, не конкретизируя виды функций C_m. Согласно (24)

$$W(\rho, \rho_\tau, \varphi) = W(\rho, \rho_\tau, \varphi_\tau) = W(\rho, \rho_\tau, \varphi + \varphi_\tau) = W(\rho, \rho_\tau)\frac{1}{2\pi}, \qquad (30)$$

т. е. φ, φ_τ, а также суммарная фаза $\varphi+\varphi_\tau$, статистически независимы от ρ и ρ_τ. В частности, независимы случайные значения огибающей и фазы, причем как в совпадающие, так и в различные моменты времени:

$$W(\rho, \varphi) = W(\rho, \varphi_\tau) = W(\rho)\frac{1}{2\pi}. \qquad (31)$$

Однако разность фаз, вообще говоря, коррелирует как с ρ, так и с ρ_τ — это непосредственно видно из (24).

7. Полученные результаты могут быть обобщены на произвольный многомерный случай. Функция распределения и характеристическая функция оказываются периодическими функциями «быстрых» времен $\omega_0\tau_i$ $(\tau_i = t_i - t_n)$:

$$W(\xi_1 \ldots \xi_n) = \sum_{m_1 \ldots m_{n-1}=-\infty}^{\infty} \cdots \sum A_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\xi_1 \ldots \xi_n)\, e^{im_1\omega_0\tau_1+\ldots+im_{n-1}\omega_0\tau_{n-1}}, \quad (32)$$

$$\theta(u_1 \ldots u_n) = \langle e^{iu_1\xi_1+\ldots+iu_n\xi_n}\rangle =$$

$$= \sum_{m_1 \ldots m_{n-1}=-\infty}^{\infty} \cdots \sum B_{m_1 \ldots m_{n-1}}(u_1 \ldots u_n)\, e^{im_1\omega_0\tau_1+\ldots+im_{n-1}\omega_0\tau_{n-1}}, \quad (33)$$

причем коэффициенты рядов (32) и (33) связаны n-мерным интегральным преобразованием Фурье аналогично (12) и (13).

Совместное статистическое распределение значений огибающей и фазы в n моментов времени имеет вид

$$W(\rho_1 \ldots \rho_n\, \varphi_1 \ldots \varphi_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{m_1 \ldots m_{n-1}=-\infty}^{\infty} \cdots \sum C_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\rho_1 \ldots \rho_n)\, e^{im_1(\varphi_n-\varphi_1)+\ldots+im_{n-1}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}. \quad (34)$$

Коэффициенты $B_{m_1 \ldots m_{n-1}}$ в (33) и $C_{m_1 \ldots m_{n-1}}$ в (34) связаны преобразованием Ганкеля:

$$B_{m_1 \ldots m_{n-1}}(u_1 \ldots u_n) = (-1)^{m_1+\ldots+m_{n-1}} \int_0^{\infty} \ldots \int d\rho_1 \ldots d\rho_n\, C_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\rho_1 \ldots \rho_n) \times$$

$$\times J_{m_1}(u_1\rho_1) \ldots J_{m_{n-1}}(u_{n-1}\rho_{n-1})\, J_{m_1+\ldots+m_{n-1}}(u_n\rho_n), \quad (35)$$

$$C_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\rho_1 \ldots \rho_n) = (-1)^{m_1+\ldots+m_{n-1}} \rho_1 \ldots \rho_n \int_0^{\infty} \ldots \int du_1 \ldots du_n u_1 \ldots u_n \times$$

$$\times J_{m_1}(u_1\rho_1) \ldots J_{m_{n-1}}(u_{n-1}\rho_{n-1})\, J_{m_1+\ldots+m_{n-1}}(u_n\rho_n). \quad (36)$$

Согласно (34) функции распределения отдельно для огибающей и фазы будут следующими:

$$W(\rho_1 \ldots \rho_n) = C_{0\ldots0}(\rho_1 \ldots \rho_n) = \rho_1 \ldots \rho_n \int_0^{\infty} \ldots \int B_{0\ldots0}(u_1 \ldots u_n)\, u_1 \ldots u_n \times$$

$$\times J_0(u_1\rho_1) \ldots J_0(u_n\rho_n)\, du_1 \ldots du_n, \quad (37)$$

$$W(\varphi_1 \ldots \varphi_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \Big[1 + \sum_{m_1 \ldots m_{n-1}}^{\infty}{}' \ldots \sum^{\infty}{}' D_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}) \times$$

$$\times e^{im_1(\varphi_n-\varphi_1)+\ldots+im_{n-1}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} \Big], \quad (38)$$

где

$$D_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}) =$$

$$= \int_0^{\infty} \ldots \int C_{m_1 \ldots m_{n-1}}(\rho_1 \ldots \rho_n)\, d\rho_1 \ldots d\rho_n = \langle e^{-im_1(\varphi_n-\varphi_1)-\ldots-i(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\rangle. \quad (39)$$

В (37)

$$B_{0\ldots0}(u_1 \ldots u_n) = \widetilde{\theta}(u_1 \ldots u_n) \tag{40}$$

нулевой член ряда Фурье (33), т. е. усредненное по временам $\omega_0\tau_i$ значение характеристической функции.

Учитывая (18), нетрудно убедиться, что коэффициенты ряда (33) и сама характеристическая функция обладают свойством четности:

$$\theta(u_1, \ldots, u_n) = \theta(-u_1, \ldots, -u_n). \tag{41}$$

Отсюда вытекает вещественность θ и четность многомерных распределений (6),

$$W(\xi_1, \ldots, \xi_n) = W(-\xi_1, \ldots, -\xi_n). \tag{42}$$

8. Развитый здесь подход может быть использован для описания более общего, чем (1), класса случайных процессов, а именно квазипериодических процессов вида

$$\xi(t) = \rho(t) F[\omega_0 t + \varphi(t)] \tag{43}$$

$$(F_{\max} = 1, \ -\pi < \varphi < \pi, \ \rho > 0)$$

со стационарными $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ и периодической зависимостью функции F от «быстрого» времени $\omega_0 t$:

$$F(\psi + 2\pi) = F(\psi), \quad \psi = \omega_0 t + \varphi. \tag{44}$$

В форме (43) можно, например, представить случайную последовательность импульсов. При этом функция $F(\psi)$ описывает форму импульса, не искаженную флуктуациями, $\rho(t)$ — случайное изменение высоты импульса, $\varphi(t)$ — случайную модуляцию по длительности и времени появления. Статистические характеристики ξ, ρ и φ при этом будут связаны соотношениями, подобными полученным выше для процесса (1).

Ограничимся здесь рассмотрением одномерных характеристик. Используя стационарность ξ и написав разложения

$$e^{iu\rho F(\psi)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m(u\rho) e^{im\psi}, \tag{45}$$

$$W(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(\rho) e^{-in\varphi},$$

нетрудно получить связь между характеристической функцией $\theta(u)$ и распределением $W(\rho)$ огибающей

$$\theta(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle = \int_0^{\infty} W(\rho) U_0(u\rho) d\rho, \tag{46}$$

$$U_0(u\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iu\rho F(\psi)} d\psi \tag{47}$$

и доказать статистическую независимость ρ и φ и закон равнораспределения для φ:

$$W(\rho, \varphi) = W(\rho)\frac{1}{2\pi}, \quad W(\varphi) = \frac{1}{2\pi},$$

$$W(\rho) = V_0(\rho), \quad V_n(\rho) = 0 \quad (n \neq 0). \tag{48}$$

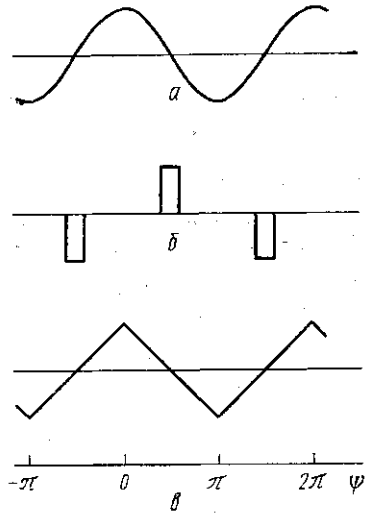
Как следует из (43) и (46), соотношение между моментами ρ, ξ и $|\xi|$ определяется формой импульсов $F(\psi)$:

$$\langle \rho^n \rangle = \frac{\langle \xi^n \rangle}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F^n(\psi)\, d\psi} = \frac{\langle |\xi^n| \rangle}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(\psi)|^n\, d\psi}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{49}$$

Многомерные характеристики для процесса (43) имеют вид (32—35), однако вместо функций Бесселя в них входят функции $U_m(u\rho)$ из (45).

Рассмотрим несколько примеров.

а) Если $F(\psi) = \cos\psi$ (рисунок, *а*), то $U_m(u\rho) = J_m(u\rho)$ и (46) переходит в (8).



б) $F(\psi)$ — знакопеременная последовательность прямоугольных импульсов с длительностью $\mu\pi$ (рисунок, *б*). В этом случае

$$U_0(u\rho) = 1 - \mu + \mu\cos u\rho, \quad (0 < \mu < 1) \tag{50}$$

и, как следует из (46) и (50), одномерные функции распределения ξ и ρ связаны соотношением

$$W(\xi) = W(-\xi) = (1-\mu)\,\delta(\xi) + \frac{\mu}{2} W(\rho)\,|_{\rho=\xi}. \tag{51}$$

Согласно (51) при отсутствии пауз между импульсами ($\mu = 1$) распределение огибающей совпадает с распределением самого процесса (в области положительных значений); в этом случае в (45)

$$U_0(u\rho) = \cos u\rho,$$

$$U_m(u\rho) = -i\,\frac{\sin(m\pi/2)}{m\pi/2}\sin u\rho \qquad (m \neq 0). \tag{52}$$

в) $F(\psi)$ — последовательность импульсов треугольной формы (рисунок, *в*). При этом

$$U_m(u\rho) = u\rho\,\frac{\sin u\rho}{(u\rho)^2 - (m\pi/2)^2} \quad (\pm m = 0, 2, 4\ldots),$$

$$U_m(u\rho) = \frac{u\rho}{i}\cdot\frac{\cos u\rho}{(u\rho)^2 - (m\pi/2)^2} \quad (\pm m = 1, 3, \ldots) \tag{53}$$

и (46) принимает вид синус-преобразования Фурье:

$$\theta(u)\,u = \int_0^\infty \frac{W(\rho)}{\rho}\sin u\rho d\rho. \tag{54}$$

Обратное преобразование дает

$$\frac{W(\rho)}{\rho} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \theta(u)\,u\sin u\rho du \tag{55}$$

(ср. с (8)).

Как следует из (55), для гауссовского импульсного процесса распределение огибающей не будет рэлеевским: подставив в (55) $\theta(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2u^2\right)$, получим:

$$W(\rho) = \sqrt{2/\pi}\,(\rho^2/\sigma^3)\,e^{-\rho^2/2\sigma^2}. \tag{56}$$

Характеристической функции (54) соответствует четная функция распределения вероятностей $W(\xi) = W(-\xi)$, причем

$$W(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos u\xi\,\theta(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{W(\rho)}{\rho}\,d\rho\int_0^\infty \frac{\cos u\xi\sin u\rho}{u}\,du. \tag{57}$$

Но

$$\int_0^\infty \frac{\cos u\xi\sin u\rho}{u}\,du = \begin{cases} \pi/2 & (\rho > \xi), \\ 0 & (\rho < \xi), \end{cases}$$

$$(\rho, \xi > 0). \tag{58}$$

Подставив (58) в (57), получим, что для треугольных импульсов соотношение между распределениями самого импульсного процесса и его огибающей будет следующим:

$$W(\xi) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|}^\infty \frac{W(\rho)}{\rho}\,d\rho \tag{59}$$

(ср. с (8) и (51)). Нетрудно убедиться, что в случае $W(\rho)$ вида (56) распределение будет гауссовским. При распределении высот импульсов по закону Рэлея, $W(\rho) = (\rho/\sigma^2)\, e^{-\rho^2/2\sigma^2}$, из (59) находим распределение импульсного процесса, выражающееся через интеграл вероятности,

$$W(\xi) = \frac{1}{2\sigma^2} \int\limits_{|\xi|}^{\infty} e^{-\rho^2/2\sigma^2}\, d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\,\sigma} \left[1 - \Phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\,\sigma} \right) \right]. \qquad (60)$$

Интегральное уравнение (46) решается относительно $W(\rho)$ или $U_0(u\rho)$ преобразованием Меллина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1966.
2. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику, ч. 1. Случайные процессы. М., 1976.

Кафедра
общей физики для мехмата

Поступила в редакцию
03.02.78