УДК 534.222

П. С. ЛАНДА

НЕЛИНЕЙНОЕ УСИЛЕНИЕ ЗВУКА В ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКАХ И САМОСИНХРОНИЗАЦИЯ МОД В АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРАХ

В известных работах по усилению звука в пьезополупроводниках [1—3] форма усиливаемой волны предполагалась близкой к синусоидальной и нелинейные эффекты слабыми. Если усиление достаточно велико и кристалл достаточно длинный, то даже слабая нелинейность приводит к существенному искажению формы усиливаемой волны. При этом используемые в [1—3] уравнения становятся непригодными. В настоящей работе рассматривается предельный случай, когда усиливаемая звуковая волна достигла насыщения, т. е. ее амплитуда перестала зависеть от амплитуды входного сигнала. Найдены форма волны и значение амплитуды. Полученные результаты позволяют также качественно описать режимы самосинхронизации мод в акустоэлектрических генераторах. Такие режимы наблюдались Мейнсом и Пэйджем [4] в кристаллической пластинке CdS при наложении поля, близкого к полю отсечки. Насколько нам известно, расчет таких режимов до сих пор практически не был проведен. Имеется лишь одна работа [5], в которой эта задача решается в приближении двух мод. Очевидно, что такое приближение не является удовлетворительным, так как в [4] наблюдалось более десятка синхронизованных мод. В настоящей работе не накладывается ограничений на число синхронизованных мод, однако результаты расчета, строго говоря, справедливы лишь для кольцевой модели акустоэлектрического генератора, поскольку рассматривается лишь одна бегущая волна с постоянной амплитудой. По-видимому, качественно режим самосинхронизации мод в обычном линейном генераторе должен слабо отличаться от рассмотренного здесь.

В качестве исходных используем уравнения для упругого смещения u, концентрации электронов n и внутреннего электрического поля в кристалле E [1—3, 6—8]:

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial E}{\partial x}-\eta\frac{\partial^3 E}{\partial x^2\partial t}=0,\\ \frac{\partial E}{\partial x}+\frac{4\pi\beta}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4\pi e}{\varepsilon}(n-n_0)=0,\\ \frac{\partial n}{\partial t}+V\frac{\partial n}{\partial x}-D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial}{\partial x}(nE)=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь V — дрейфовая скорость электронов, обусловленная внешним приложенным к кристаллу электрическим полем; ρ — плотность кристалла; c — модуль упругости; β — пьезоэлектрический модуль; η — коэффициент вязкости; ε — диэлектрическая проницаемость; μ — подвижность электронов; D — коэффициент диффузии.

В режиме насыщения, когда амплитуда волны не зависит от времени и координаты, переменные u, E и n будут периодическими функциями одной переменной $\xi = t - x/v$, где v — неизвестная скорость распространения волны. Период этих функций T должен быть равен $2\pi/\omega$, где ω — частота усиливаемого сигнала. Это условие позволяет найти v.

Заменяя в (1) $\partial/\partial t$ на $d/d\xi$, $\partial/\partial x$ на $-(1/v)\,d/d\xi$, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций u, E и n:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}\left(1-\frac{a^2}{v^2}\right)-\frac{\beta a^2}{cv}\frac{dE}{d\xi}-\frac{\eta a^2}{cv^2}\frac{d^3u}{d\xi^3}=0,$$

$$\frac{dE}{d\xi}+\frac{v}{\mu\tau}\left(\frac{n}{n_0}-1\right)-\frac{4\pi\beta}{\varepsilon v}\frac{d^2u}{d\xi^2}=0, \tag{2}$$

$$(V-v)\frac{dn}{d\xi}+\frac{1}{\varkappa^2 v\tau}\frac{d^2n}{d\xi^2}+\mu\frac{d}{d\xi}(nE)=0. \tag{3}$$

Здесь $a=\sqrt{c/\rho}$ — скорость звука в кристалле без учета пьезоэффекта; $\tau=\varepsilon/4\pi e n_0\mu$ — максвелловское время релаксации; $\varkappa=1/\sqrt{D\tau}$ — величина, обратная радиусу Дебая.

Исключив из уравнений (2) u и проинтегрировав уравнение (3), получим

$$\left(\frac{ra^2}{v^2-a^2}-1\right)\frac{dE}{d\xi}=\frac{v}{\mu\tau}\left(\frac{n}{n_0}-1\right)-$$

$$-\frac{a^2\eta}{c(v^2-a^2)}\left(\frac{d^2E}{d\xi^2}+\frac{v}{\mu n_0\tau}\frac{dn}{d\xi}\right), \tag{4}$$

$$\frac{dn}{d\xi}=-\mu\varkappa^2 v\tau\left[nE+\frac{(V-v)(n-n_0)}{\mu}-n_0C\right]. \tag{5}$$

Здесь $r=4\pi\beta^2/\varepsilon c$ — константа электромеханической связи; C — константа интегрирования.

Если вязкость достаточно мала, так что ее влияние на решение уравнения (4) проявляется слабо, то

$$\frac{d^2E}{d\xi^2}+\frac{v}{\mu n_0\tau}\frac{dn}{d\xi}\simeq\frac{ra^2}{v^2-a^2}\frac{d^2E}{d\xi^2}\simeq\frac{ra^2v}{n_0\mu\tau(v^2-a^2)\left(\frac{ra^2}{v^2-a^2}-1\right)}\frac{dn}{d\xi}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4) и введя безразмерные переменные $\tilde{n}=n/n_0$,

$$\tilde{E}=(\varkappa^2 v\mu\tau/\alpha)E,\ \text{где}\ \alpha=\varkappa v\left(\frac{ra^2}{v^2-a^2}-1\right)^{-1/2},$$

перепишем уравнения (4) и (5) в следующем виде:

$$\frac{d\tilde{E}}{d\xi}=\alpha(\tilde{n}-1)-\frac{\eta\varkappa^2v^2}{rc\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa^2v^2}+1\right)^2\frac{d\tilde{n}}{d\xi},$$

$$\frac{d\tilde{n}}{d\xi}=-\alpha\tilde{n}\tilde{E}-\mu\varkappa^2v\tau\left[\frac{(V-v)(\tilde{n}-1)}{\mu}-C\right]. \tag{7}$$

Уравнения (7) описывают некую неконсервативную колебательную систему. Искомое решение должно представлять собой предельный

цикл этой системы. Анализ показывает, что при малой вязкости система (7) близка к консервативной системе, описываемой уравнениями

$$\frac{d\tilde{E}}{d\xi} = \alpha(\tilde{n} - 1),$$

$$\frac{d\tilde{n}}{d\xi} = -\alpha\,\tilde{n}\,\tilde{E}. \qquad (8)$$

Поэтому искомый предельный цикл должен быть близок к одному из периодических решений системы (8).

Из (8) легко найти уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости $(\tilde{E}, \tilde{n})$:

$$\tilde{E}^2 + 2(\tilde{n} - 1 - \ln\tilde{n}) = A^2. \qquad (9)$$

Здесь A — произвольная постоянная, равная амплитуде колебаний функции $\tilde{E}$. Графики найденных интегральных кривых для ряда значений A, указанных цифрами, представлены на рис. 1. Примерная форма

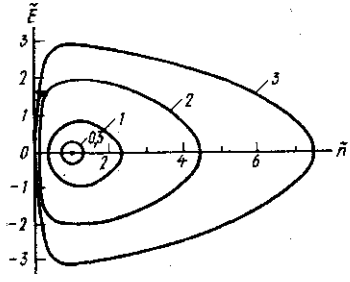

Рис. 1. Фазовый портрет

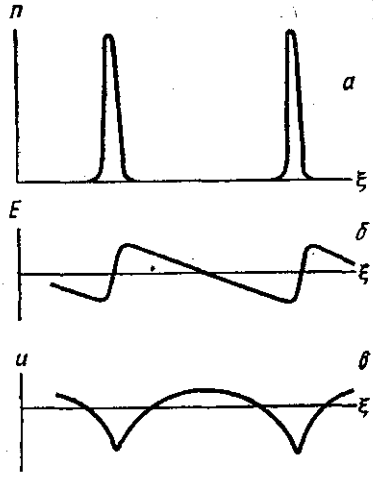

Рис. 2. Форма колебаний концентрации (*а*), поля (*б*), упругого смещения (*в*)

колебаний концентрации и поля при достаточно больших амплитудах A показана на рис. 2, *а*, *б*. Форма упругой волны может быть найдена из второго уравнения (2):

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{ev}{4\pi\beta}\left[\frac{dE}{d\xi} + \frac{v}{\mu\tau}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right)\right] = \frac{en_0v^2}{\beta\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa^2 v^2} + 1\right)\frac{d\tilde{E}}{d\xi}.$$

При больших амплитудах A форма колебаний упругого смещения u достаточно хорошо аппроксимируется последовательностью отрезков парабол (см. рис. 2, *в*).

Найдем теперь скорость волны v из условия периодичности решения уравнений (8). Из второго уравнения (8) следует, что

$$\alpha T = \frac{2\pi a}{\omega} = -\oint \frac{d\tilde{n}}{\tilde{n}\tilde{E}} = 2\pi S_0(A), \tag{10}$$

где

$$S_0(A) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\tilde{n}_1}^{\tilde{n}_2} \frac{d\tilde{n}}{\tilde{n}(A^2 - 2(\tilde{n} - 1 - \ln\tilde{n}))^{1/2}};$$

$\tilde{n}_1$, $\tilde{n}_2$ — корни уравнения $A^2 - 2(\tilde{n} - 1 - \ln\tilde{n}) = 0$.

Подставляя в (10) выражение для α, найдем связь между скоростью v и амплитудой A:

$$v^2 - a^2 = \frac{ra^2}{1 + \varkappa^2/k^2(A)}, \tag{11}$$

где $k(A) = (\omega/a) S_0(A)$.

Из (11) видно, что скорость распространения волны v всегда больше a, но меньше скорости звука в кристалле с учетом пьезоэффекта $a\sqrt{1+r}$. Только при очень больших амплитудах A v приближается к $a\sqrt{1+r}$.

Чтобы найти амплитуду волны A, рассмотрим уравнения (7) и исключим из них $\tilde{E}$. Тогда получим одно уравнение для концентрации $\tilde{n}$:

$$\frac{d^2\tilde{n}}{d\xi^2} - \frac{1}{\tilde{n}}\left(\frac{d\tilde{n}}{d\xi}\right)^2 + \alpha^2\tilde{n}(\tilde{n} - 1) =$$

$$= \left[\frac{\eta(\alpha^2 + \varkappa^2 v^2)^2}{rc\varkappa^2 v^2}\tilde{n} - \frac{\mu\varkappa^2 v\tau}{\tilde{n}}\left(\frac{V - v}{\mu} + C\right)\right]\frac{d\tilde{n}}{d\xi}. \tag{12}$$

Если умножить обе части уравнения (12) на $d\tilde{n}/\tilde{n}^2$, то слева мы получим изменение колебательной энергии консервативной части системы, а справа — работу «сил трения». В стационарном режиме работа «сил трения» в среднем за период колебаний должна равняться нулю. Из этого условия можно получить уравнение для определения амплитуды A. Оно имеет вид

$$F(A) = \frac{rc\tau}{\eta a}(V - v), \tag{13}$$

где

$$F(A) = \left(1 + \frac{k^2(A)}{\varkappa^2}\right)^2 \frac{S_1(A)}{S_2(A)} - \frac{\mu\tau rc}{\eta a} C,$$

$$S_1(A) = \int\limits_{\tilde{n}_1}^{\tilde{n}_2} \sqrt{A^2 - 2(\tilde{n} - 1 - \ln\tilde{n})}\, d\tilde{n},$$

$$S_2(A) = \int\limits_{\tilde{n}_1}^{\tilde{n}_2} \frac{1}{\tilde{n}^2}\sqrt{A^2 - 2(\tilde{n} - 1 - \ln\tilde{n})}\, d\tilde{n}.$$

В выражение для функции $F(A)$ входит неизвестная константа C, зависящая от амплитуды A. Эту константу можно определить, используя условие периодичности решения уравнений (7) и закон Ома для замкнутой цепи. Чтобы уравнения (7) имели периодическое решение, их правые части не должны содержать постоянных составляющих. Отсюда следует, что $\tilde{\tilde{n}}=1$ и

$$C = \frac{\alpha}{\mu \varkappa^2 v \tau} \widetilde{\widetilde{nE}}. \tag{14}$$

Подставляя в (14) значение $\tilde{n}$ из первого уравнения (7) и учитывая, что $\tilde{E}$ периодическая функция ξ, имеем

$$C = \bar{E} - \frac{\eta v}{\mu r c \tau \pi} \frac{S_1(A)}{S_0(A)} \left(1 + \frac{k^2(A)}{\varkappa^2}\right)^2 \tag{15}$$

Здесь $\bar{E}$ — постоянная составляющая электрического поля в кристалле, возникающая за счет нелинейности.

Воспользуемся теперь законом Ома для замкнутой цепи:

$$\mathscr{E} = I R_i + \frac{V}{\mu} l + \int_0^l E\, dl, \tag{16}$$

где $\mathscr{E}$ — э. д. с. источника питания; R_i — его внутреннее сопротивление (включая сопротивление контактов и подводящих проводов); I — полный ток в цепи, равный

$$I = S(en_0 V + j_{ae}),$$

где

$$j_{ae} = e(n - n_0)V + e\mu nE - eD\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}, \tag{17}$$

S — площадь поперечного сечения кристалла; j_{ae} — плотность акустоэлектрического тока. Из (16) и (17) следует, что

$$\bar{j}_{ae} S R_i + \bar{E} l = 0, \tag{18}$$

где $\bar{j}_{ae}$ — постоянная составляющая акустоэлектрического тока, равная

$$\bar{j}_{ae} = e\mu \overline{nE} = e\mu n_0 C. \tag{19}$$

Учитывая (15), (18) и (19), находим $\bar{E}$ и C:

$$\bar{E} = -\frac{e\mu n_0 S R_i}{l} C = -\frac{R_i}{R} C,$$

$$C = -\frac{\eta v}{\mu r c \tau \pi} \frac{S_1(A)}{S_0(A)} \left(1 + \frac{k^2(A)}{\varkappa^2}\right)^2 \frac{R}{R + R_i}. \tag{20}$$

Здесь $R = l/e\mu n_0 S$ — сопротивление кристалла по постоянному току.

Из формул (19) и (20) следует, что постоянная составляющая акустоэлектрического тока всегда отрицательна и по абсолютной величине растет с ростом амплитуды колебаний. Этот факт согласуется с экспериментальными данными Мэйнса и Пэйджа [6].

С учетом (20) выражение для фукнции $F(A)$ принимает вид

$$F(A)=\left(1+\frac{k^2(A)}{\varkappa^2}\right)^2\left[1+\frac{RS_2(A)}{\pi(R+R_i)S_0(A)}\right]\frac{S_1(A)}{S_2(A)}. \qquad (21)$$

С ростом A величина $S_2(A)$ быстро растет и при $A\geqslant 3$ формулу (21) можно упростить, т. е. положить

$$F(A)=\left(1+\frac{k^2(A)}{\varkappa^2}\right)^2\frac{RS_1(A)}{\pi(R+R_i)S_0(A)}.$$

Зависимость $F(A)$ при $\omega/\varkappa a=1$, $R_i=0$ изображена на рис. 3. Проведя на этом рисунке линию $rc\tau(V-v)/\eta a$ до пересечения с кривой $F(A)$, можно найти амплитуду волны в режиме насыщения при заданном значении дрейфовой скорости V.

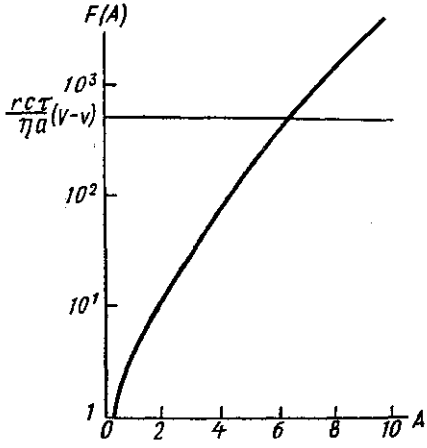

Рис. 3. График функции F(A)

Аналогично решается задача об определении формы и амплитуды колебаний концентрации и поля в кольцевой модели акустоэлектрического генератора. Различие имеется лишь в условии периодичности, из которого определяется скорость волны v. Для кольцевого генератора период функций $u(\xi)$, $E(\xi)$ и $n(\xi)$ должен быть равен $T_m=l/mv_m$, где m — целое число; l — длина кристалла. Если $m=1$, то спектр колебаний будет содержать все четные моды кристаллической пластинки начиная с основной. Если же m больше единицы, то в спектре колебаний будут выделены моды, кратные m-й. Такие режимы при определенных условиях наблюдались в акустоэлектрических генераторах [10].

В заключение заметим, что найденная форма доменов электрического поля качественно согласуется с измеренной экспериментально при помощи зондов [7, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич В. Л., Лайхтман Б. Д. ЖЭТФ, 1965, **49**, 960.
2. Гуревич В. Л. Тр. IX Междунар. конфер. по физике полупроводников. М., 1969, с. 943.
3. Гуревич В. Л., Лайхтман Б. Д. «Физика тв. тела», 1965, **7**, 3218.
4. Maines J. D., Paige E. G. S. «Sol. State Comm.», 1970, **8**, 421.
5. Зюрюкин Ю. А., Хитрин В. С., Шевчик В. Н. VI Междунар. симпозиум по нелинейной акустике. Тезисы докладов. М., 1975.
6. Мэйнс Дж. Д., Пэйдж Э. Г. С. Тр. IX Междунар. конфер. по физике полупроводников. М., 1969, с. 983.
7. Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М., 1972.
8. Гуляев Ю. В. «Физ. и техн. полупроводников», 1970, **4**, 415.
9. White D. L. «J. Appl. Phys.», 1962, **33**, 2547.
10. Зюрюкин Ю. А., Стефко В. В., Хитрин В. С., Старухин Ю. П. «Физ. и техн. полупроводников», 1974, **8**, 1196.
11. Chartier G., Koster A., Leroux-Hugon P. «Phys. Lett.», 1969, **29A**, 379.

Кафедра
общей физики для мехмата

Поступила в редакцию
15.02.77