УДК 548:535.371:621.373.8

А. В. АНДРЕЕВ, Р. В. АРУТЮНЯН, Ю. А. ИЛЬИНСКИЙ

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ БРЭГГОВСКОЙ ДИФРАКЦИИ

В последнее время в связи с проблемой гамма-лазера в ряде работ рассматривалась задача генерации гамма-излучения в условиях эффекта Бормана [1]. При этом поглощение гамма-квантов имеет аномально малую величину, что может быть использовано для приближения к порогу генерации когерентного мессбауэровского излучения. Однако одновременно с эффектом Бормана проявляется и эффект подавления неупругих каналов ядерных реакций [2], приводящий к уменьшению коэффициента усиления.

В работе [3] была предсказана, а в [4] теоретически доказана возможность осуществления условий, при которых одновременно с аномальным прохождением гамма-квантов происходит ослабление эффекта подавления. Авторами [4] показано, что использование переходов высокой мультипольности позволяет увеличить длину пробега гамма-квантов на два порядка при одновременном увеличении длины усиления только на порядок. Таким образом, произведение коэффициента усиления на длину поглощения μL может быть увеличено на порядок.

Ранее [5] было показано, что основную роль при генерации когерентного мессбауэровского гамма-излучения должны играть процессы сверхизлучения. Поэтому строгое рассмотрение генерации мессбауэровского излучения должно проводиться в рамках теории суперфлуоресценции. В [5, 6, 7] проведено рассмотрение одномодовой генерации, что позволило изучить характерные особенности суперфлуоресцентной кинетики высвечивания и получить аналитические выражения для основных параметров импульса сверхизлучения. Экспериментально одномодовый режим может быть осуществлен при иглообразной форме рабочего вещества. Однако в гамма-диапазоне условие иглообразности $\frac{\lambda l}{d^2} \sim 1$ приводит к чрезвычайно малому значению поперечного сечения кристалла. Так, для $\lambda \sim 10^{-9}$ см и при длине кристалла $l \sim 1$ см получим для величины сечения $d^2 \sim 10^{-9}$ см^2. Таким образом, обеспечение направленности гамма-излучения за счет иглообразной формы рабочего вещества является проблематичным.

Нами проведено рассмотрение суперфлуоресцентной кинетики высвечивания системы возбужденных ядер в кристалле при выполнении условий Брэгга. Показано, что этот режим сходен с одномодовым режимом с некоторыми характерными значениями параметров. Использование аномального прохождения гамма-квантов позволяет уменьшить порог генерации и время задержки импульса сверхизлучения на порядок. При этом также снимается требование иглообразности рабочего вещества. Так, в случае рабочего вещества в виде тонкой ленты диа-

грамма излучения будет определяться пересечением дифракционной диаграммы рабочего вещества с конусом брэгговской дифракции.

1. Динамика поля и основные уравнения. Рассмотрим систему двухуровневых излучателей, заключенных в кристалле объемом V. В начальный момент времени часть излучателей возбуждена и их состояния полностью некоррелированы. Поле находится в вакуумном состоянии. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{п}} + \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{вз}}, \tag{1}$$

где

$\hat{H}_{\text{п}} = \sum\limits_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a^{+}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}$ — гамильтониан свободного поля;

$\hat{H}_0 = \dfrac{\hbar\omega_0}{2} \sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_{z,i}$ — гамильтониан излучателей;

$\hat{H}_{\text{вз}} = \sum\limits_{\mathbf{k},\lambda} g_{\mathbf{k},\lambda}(t)\, a^{+}_{\mathbf{k},\lambda} R^{-}_{\mathbf{k}} + g^{*}_{\mathbf{k},\lambda}(t)\, a^{-}_{\mathbf{k},\lambda} R^{+}_{\mathbf{k}}$ — гамильтониан взаимодействия поля с излучателями;

ω_0 — частота рабочего перехода; $a^{+}_{\mathbf{k},\lambda}$ — оператор рождения фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией λ; V — объем рабочего вещества, совпадающий с объемом квантования;

$$g_{\mathbf{k},\lambda}(t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_{\mathbf{k}}}}\, \langle + | \hat{j}^{+}(\mathbf{k}, \lambda) | - \rangle\, e^{i(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}})t}, \tag{2}$$

$$R^{\pm}_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{N} \sigma^{\pm}_{j} e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}; \quad R_{z,\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{zj} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} — \tag{3}$$

коллективные ядерные операторы, $\mathbf{r}_j$ — радиус-вектор j-того ядра; $\sigma^{\pm}_{j}$; σ_{zj} — матрицы Паули; $\hat{j}^{+}(\mathbf{k}, \lambda)$ — положительно-частотная часть оператора тока перехода.

Уравнение движения для матрицы плотности системы «ядра плюс поле» в представлении взаимодействия будет иметь вид

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\hat{\rho}}}{\partial t} = [\hat{H}_{\text{вз}} \tilde{\hat{\rho}}] + \hat{\Gamma}\tilde{\hat{\rho}},$$

где

$$\tilde{\hat{\rho}} = U\hat{\rho}U^{-1}; \quad U = e^{\frac{i}{\hbar}[H_{\text{п}} + H_0]}. \tag{4}$$

Последнее слагаемое в (4) учитывает взаимодействие системы «ядра плюс поле» с термостатом.

Из коммутационных соотношений для матриц Паули легко получить коммутаторы для операторов $R^{\pm}_{\mathbf{k}}$, $R_{z,\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} [R^{+}_{\mathbf{k}_1} R^{-}_{\mathbf{k}_2}] &= R_{z,\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}, \\ [R_{z,\mathbf{k}_1} R^{\pm}_{\mathbf{k}_2}] &= \mp 2R^{\pm}_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Среднее значение для оператора $R_{z,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}$ в состоянии, в котором находится система в момент времени t, равно:

$$\langle t\,|\,R_{z,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,|\,t\rangle = \sum_l e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,\mathbf{r}_l} - \sum_j e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}_j},$$

где суммирование по l относится к возбужденным, а по j — к невозбужденным ядрам. Учитывая пространственную однородность начальных условий, можно сказать, что вышеприведенное среднее равно нулю при $\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{K}_0$, где $\mathbf{K}_0$ — вектор обратной решетки. Таким образом, имеем приближение

$$[R^+_{\mathbf{k}_1}\,R^-_{\mathbf{k}_2}] = R_z\,\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1+\mathbf{K}_0}. \tag{6}$$

Физический смысл указанного приближения заключается в предположении о пренебрежимо малом взаимодействии небрэгговских мод. В дальнейшем мы будем учитывать только четыре моды:

$$\mathbf{k},\ -\mathbf{k},\ \mathbf{k}+\mathbf{K}_0,\ -(\mathbf{k}+\mathbf{K}_0),\ \text{где}\ |\,\mathbf{k}\,| = |\,\mathbf{k}+\mathbf{K}_0\,| = \frac{\omega_0}{c},$$

что соответствует рассмотрению резонансного взаимодействия при выполнении условия Брэгга.

Перейдем от операторов рождения фотонов в модах $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}+\mathbf{K}_0$ к операторам рождения борнановской и антиборнановской мод:

$$b^+_1 = \frac{a^+_{\mathbf{k}} - a^+_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0}}{\sqrt{2}},\quad b^+_3 = \frac{a^+_{-\mathbf{k}} - a^+_{-(\mathbf{k}+\mathbf{K}_0)}}{\sqrt{2}},$$

$$b^+_2 = \frac{a^+_{\mathbf{k}} + a^+_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0}}{\sqrt{2}},\quad b^+_4 = \frac{a^+_{-\mathbf{k}} + a^+_{-(\mathbf{k}+\mathbf{K}_0)}}{\sqrt{2}}. \tag{7}$$

Через новые операторы b^+_α гамильтониан взаимодействия запишется в виде

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1,2,3,4} (b^+_\alpha\,R^-_\alpha + b^-_\alpha\,R^+_\alpha),$$

где

$$R^\pm_1 = \frac{g_{\mathbf{k}} - g_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0}}{\sqrt{2}}\,R^\pm_{\mathbf{k}},\quad R^\pm_2 = \frac{g_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0}}{\sqrt{2}}\,R^\pm_{\mathbf{k}},$$

$$R^\pm_3 = \frac{g_{-\mathbf{k}} - g_{-(\mathbf{k}+\mathbf{K}_0)}}{\sqrt{2}}\,R^\pm_{-\mathbf{k}},\quad R^\pm_4 = \frac{g_{-\mathbf{k}} + g_{-(\mathbf{k}+\mathbf{K}_0)}}{\sqrt{2}}\,R^\pm_{-\mathbf{k}}. \tag{8}$$

В соотношении (8) учтено, что $R^\pm_{\mathbf{k}} = R^\pm_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0}$. Для операторов $R^\pm_\alpha$ получим коммутационные соотношения, аналогичные (5):

$$[R^+_\alpha\,R^-_\beta] = (1 \pm p)\,R_z\,\delta_{\alpha\beta},$$

где знак плюс в правой части соответствует $\alpha=2,4$, минус — $\alpha=1,3$;

$$p = \frac{g_{\mathbf{k}}\,g^*_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0} + g^*_{\mathbf{k}}\,g_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_0}}{\sqrt{2}},$$

$$[R^\pm_\alpha\,R_z] = \mp 2R^\pm_\alpha. \tag{9}$$

Вводя операторы для числа фотонов в борматовской и антиборматовской компонентах, $n_B = b_1^+ b_1^- + b_3^+ b_3^-$ и $n_A = b_2^+ b_2^- + b_4^+ b_4^-$ соответственно получим цепочку уравнений:

$$\frac{d\langle n_A\rangle}{dt} + \frac{\langle n_A\rangle}{\tau_A} = \frac{i}{\hbar}\sum_{i=2,4}(\langle b_i^+ R_i^-\rangle - \langle b_i R_i^+\rangle) = \langle F_A\rangle,$$

$$\frac{d\langle n_B\rangle}{dt} + \frac{\langle n_B\rangle}{\tau_B} = \frac{i}{\hbar}\sum_{i=1,3}(\langle b_i^+ R_i^-\rangle - \langle b_i R_i^+\rangle) = \langle F_B\rangle,$$

$$\frac{d\langle F_A\rangle}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{T_2}\right)\langle F_A\rangle = \frac{1+p}{T_0^2}(\langle n_A R_z\rangle + \langle S_0\rangle + \langle S_1\rangle),$$

$$\frac{d\langle F_B\rangle}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{T_2}\right)\langle F_B\rangle = \frac{1-p}{T_0^2}(\langle n_B R_z\rangle + \langle S_0\rangle + \langle S_1\rangle),$$

$$\frac{d\langle S_0\rangle}{dt} = -\varkappa(\langle F_A\rangle + \langle F_B\rangle),$$

$$\frac{d\langle S_1\rangle}{dt} + \frac{\langle S_1\rangle}{T_2} = \langle(F_A + F_B)R_z\rangle, \qquad (10)$$

$$\frac{d\langle R_z\rangle}{dt} + \frac{\langle(R_z - R_z(0))\rangle}{T_1^*} = -2\langle(F_B + F_A)\rangle,$$

где

$$\tau_B = \frac{\tau}{1-p_e}; \quad \tau_A = \frac{\tau}{1+p_e}; \quad 1 - p_e = \frac{l_{OB}}{l_B};$$

l_B — длина пробега борматовских квантов; l_{OB} — длина пробега гамма-квантов вдали от условий Брэгга; $\varkappa$ — число мод;

$$S_1 = \sum_{j\neq i}\langle\sigma_i^+\sigma_j^-\rangle e^{ik\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)};$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N}\langle\sigma_i^+\sigma_i^-\rangle, \quad \frac{1}{T_0^2} = \frac{2|g|^2}{\hbar^2}.$$

Отношение $(1-p)/(1-p_e)$ для переходов высокой мультипольности может достигать десяти [4].

В полуклассическом пределе системы (10), т. е. при замене $\langle nR_z\rangle$ на $\langle n\rangle\langle R_z\rangle$ и $\langle FR_z\rangle$ на $\langle F\rangle\langle R_z\rangle$ [5, 6, 7], получаем замкнутую систему уравнений

$$\frac{dn_A}{dt} + \frac{n_A}{\tau_A} = F_A,$$

$$\frac{dF_A}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{T_2}\right)F_A = \frac{1+p}{T_0^2}(n_A R_z + S_0 + S_1),$$

$$\frac{dn_B}{dt} + \frac{n_B}{\tau_B} = F_B, \qquad (11)$$

$$\frac{dF_B}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_B}+\frac{1}{T_2}\right)F_B=\frac{1-p}{T_0^2}(n_B R_z+S_0+S_1),$$

$$\frac{dS_1}{dt}+\frac{S_1}{T_2}=(F_A+F_B)R_z,$$

$$\frac{dR_z}{dt}=-2(F_A+F_B),$$

$$R_z(0)=N,\quad F_A(0)=F_B(0)=0,\quad S_1(0)=0,$$

$$n_A(0)=n_B(0)=0.$$

2. Решение и анализ уравнений. Решение системы (11), содержащей четыре нелинейных уравнения, представляет сложную задачу. Однако в гамма-диапазоне соотношение между константами τ_A, τ_B и T_2 ($\tau_A\sim10^{-11}$ с, $\tau_B\sim10^{-10}$—10^{-9} с, $T_2\sim10^{-5}$—10^{-6} с) позволяет воспользоваться методом асимптотического разложения для сингулярно возмущенных уравнений [8].

В нулевом порядке асимптотического разложения из первых двух уравнений системы (11) получаем

$$F_A^{(0)}=\frac{2(1+p)\tau_A}{T_0^2}(S_0+S_1),\quad n_A^0=0,\quad n_A^1=\tau_A F_A^0. \tag{12}$$

Подставляя (12) в оставшиеся уравнения, получаем для числа фотонов в бормановской компоненте систему из четырех уравнений, аналогичную системе уравнений для одномодовой задачи [7]:

$$\frac{dn_B}{dt}+\frac{n_B}{\tau_B}=F_B, \tag{13}$$

$$\frac{dF_B}{dt}+\frac{1}{2\tau_B}F_B=\frac{(1-p)}{T_0^2}(n_B R_z+S_0+S_1),$$

$$\frac{dS_1}{dt}+\frac{S_1}{T_2}=\left[F_B+\frac{2(1+p)}{T_0^2}\tau_A(S_0+S_1)\right]R_z,$$

$$\frac{dR_z}{dt}=-2\left[F_B+\frac{2(1+p)\tau_A}{T_0^2}(S_0+S_1)\right],$$

$$R_z(0)=N,\ n_B(0)=0,\ S_1(0)=0,\ S_0=\varkappa\frac{(R_z+N)}{2}.$$

При решении системы (13) можно также воспользоваться асимптотическим разложением и свести ее к системе двух уравнений, которая решается аналитически. Получаемое решение полностью совпадает с решением одномодовой задачи в [7]. Поэтому мы только приведем выражения для основных параметров импульса сверхизлучения. Для времени задержки получаем

$$t_0=\left(\frac{1}{\tau_c}-\frac{1}{T_2}\right)^{-1}\ln\frac{N}{\varkappa}, \tag{14}$$

где

$$\frac{1}{\tau_c}=\frac{2N\tau_{эфф}}{T_0^2},\quad \tau_{эфф}=(1-p)\tau_B+(1+p)\tau_A.$$

Для амплитуд борманновской и антиборманновской компонент будем иметь:

$$n_{A\max} = \frac{N}{4}\,\frac{2(1+p)N\tau_A^2}{T_0^2}, \qquad (15)$$

$$n_{B\max} = \frac{N}{4}\,\frac{2(1-p)N\tau_B^2}{T_0^2}.$$

Условие для порога генерации будет иметь вид:

$$\frac{2N\tau_{эфф}}{T_0^2} > \frac{1}{T_2},$$

или через коэффициент усиления μ и длину поглощения $L_{эфф}=c\tau_{эфф}$

$$\mu L_{эфф} > 1. \qquad (16)$$

В случае $\tau_A \ll \tau_B$ мы получим, что пороговое значение инверсной населенности уменьшается по сравнению со случаем сверхизлучения вдали от условий Брэгга в $(1-p)/(1-p_e)$ раз. При этом число квантов в антиборманновской компоненте пренебрежимо мало по сравнению с числом квантов в борманновской компоненте.

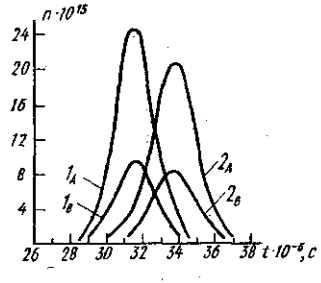

Рис. 1. Временная картина импульса сверхизлучения

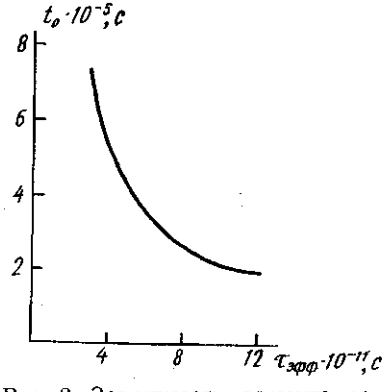

Рис. 2. Зависимость времени задержки импульса сверхизлучения t_0 от времени $\tau_{эфф}$

На рис. 1—3 представлены результаты численного интегрирования системы (11). На рис. 1 показана форма импульса сверхизлучения борманновской (индекс B) и антиборманновской (индекс A) компонент при $T_2=10^{-3}$ с (кривые 1_A и 1_B) и $T_2=10^{-5}$ с (кривые 2_A, 2_B). Масштаб по оси ординат антиборманновских компонент увеличен на рисунке в 100 раз. На рис. 2 построена зависимость времени задержки импульса сверхизлучения t_0 от параметра $\tau_{эфф}$ для случая $\tau_c/T_2 \ll 1$; $\tau_{эфф}$ — сумма времен затухания борманновской и антиборманновской компонент: $\tau_{эфф}=(1-p)\tau_B+(1+p)\tau_A$; $(1-p)/(1+p)$ — отношение коэффициентов

усиления борманновской и антиборманновской компонент. На рис. 3 представлена зависимость $n_{B\,max}$ от $N\tau_B(1-p)^{1/2}$.

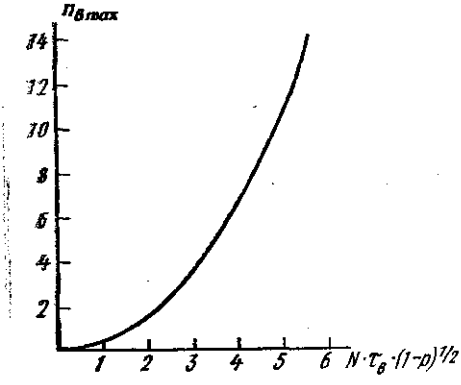

Рис. 3. Зависимость максимума амплитуды борманновской компоненты от параметра $N\tau_B(1-p)^{1/2}$, где N — концентрация возбужденных ядер; τ_B — время жизни фотонов в борманновской компоненте

Аналитические выражения (14), (15) дают значения, полностью совпадающие с результатами численного интегрирования системы (11).

Таким образом, суперфлуоресцентная кинетика высвечивания в условиях брэгговской дифракции сходна с кинетикой одномодового режима при некотором эффективном затухании гамма-квантов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borrmann T. «Phys. Zeit.», 1941, 42, 157.
2. Афанасьев А. М., Каган Ю. ЖЭТФ, 1965, 48, 327.
3. Каган Ю. «Письма в ЖЭТФ», 1974, 20, 27.
4. Андреев А. В., Ильинский Ю. А. ЖЭТФ, 1975, 68, 811.
5. Андреев А. В., Ильинский Ю. А., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 1977, 73, 1296.
6. Емельянов В. И., Климонтович Ю. Л. «Оптика и спектроскопия», 1976, 41, 913.
7. Андреев А. В. ЖЭТФ, 1977, 72, 1397.
8. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

Кафедра
волновых процессов

Поступила в редакцию
03.03.78