УДК 521.13

Л. Г. ЛУКЬЯНОВ

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ МНОГИХ ТЕЛ

Известно существование симметричных решений для ограниченной круговой задачи трех тел во вращающейся прямоугольной системе координат [1] и для ограниченной задачи трех тел в координатах Нехвила [2]. Для исследования условий существования аналогичных симметричных решений в более общих задачах в настоящей работе рассматриваются уравнения движения задачи многих тел в координатах, представляющих собой обобщение координат Нехвила в ограниченной задаче трех лет.

В качестве исходных уравнений задачи n тел рассмотрим уравнения движения в относительной подвижной системе координат $Axyz$ [3]:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_i - 2\omega_3\dot{y}_i + 2\omega_2\dot{z}_i - (\omega_2^2 + \omega_3^2)\,x_i + \\
&+ \omega_1\omega_2 y_i + \omega_1\omega_3 z_i - \dot{\omega}_3 y_i + \dot{\omega}_2 z_i + w_1 = X_i,\\
&\ddot{y}_i - 2\omega_1\dot{z}_i + 2\omega_3\dot{x}_i - (\omega_3^2 + \omega_1^2)\,y_i + \\
&+ \omega_2\omega_3 z_i + \omega_2\omega_1 x_i - \dot{\omega}_1 z_i + \dot{\omega}_3 x_i + w_2 = Y_i,\\
&\ddot{z}_i - 2\omega_2\dot{x}_i + 2\omega_1\dot{y}_i - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\,z_i + \\
&+ \omega_3\omega_1 x_i + \omega_3\omega_2 y_i - \dot{\omega}_2 x_i + \dot{\omega}_1 y_i + w_3 = Z_i,\\
&(i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$X_i = f\sum_{j\neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3};$$

$$Y_i = f\sum_{j\neq i} m_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3};$$

$$Z_i = f\sum_{j\neq i} m_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3};$$

$$\Delta_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2;$$

f — гравитационная постоянная; m_j — масса j-того тела; w_1, w_2, w_3 — компоненты ускорения начала A; ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты угловой скорости вращения системы координат;

$$\omega_1 = \dot{\Omega}\sin I\sin\Phi + \dot{J}\cos\Phi;$$

$$\omega_2 = \dot{\Omega}\sin I\cos\Phi - \dot{J}\sin\Phi;$$

$$\omega_3 = \dot{\Omega}\cos I + \dot{\Phi};$$

Ω, I, Φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, характеризующие направление осей подвижной системы координат по отношению к неподвижной.

Следующее дальше преобразование включает в себя преобразование сжатия для координат и переход к новой независимой переменной Φ вместо времени t:

$$\left.\begin{gathered} x_i = a\xi_i, \quad y_i = a\eta_i, \quad z_i = a\zeta_i, \\ \frac{d}{dt} = \dot{\Phi}\,\frac{d}{d\Phi}, \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

где $a = a(t)$ — произвольная положительная функция, непрерывная с непрерывными производными до второго порядка включительно.

Для полного определения преобразования (2) необходимо знание зависимости $\Phi = \Phi(t)$. Далее функция $\Phi(t)$ считается заданной (как одна из шести величин, определяющих положение подвижной системы координат относительно неподвижной). Будем также предполагать, что $\Phi(t)$ является монотонной и непрерывной функцией с непрерывными производными до второго порядка включительно.

Уравнения движения в системе $A\xi\eta\zeta\Phi$ имеют вид:

$$\left.\begin{gathered}
a\xi_i''\dot{\Phi}^2 + a\xi_i'\dot{\Phi}'\dot{\Phi} + 2a'\xi_i'\dot{\Phi}^2 + a''\xi_i\dot{\Phi}^2 + \\
+ a'\xi_i\dot{\Phi}'\dot{\Phi} - 2\omega_3(a\eta_i' + a'\eta_i)\dot{\Phi} + \\
+ 2\omega_2(a\zeta_i' + a'\zeta_i)\dot{\Phi} - a\xi_i(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \\
+ a\omega_1\omega_2\eta_i + a\omega_1\omega_3\zeta_i - a\omega_3'\eta_i\dot{\Phi} + \\
+ a\omega_2'\zeta_i\dot{\Phi} + w_1 = X_i, \\
a\eta_i''\dot{\Phi}^2 + a\eta_i'\dot{\Phi}'\dot{\Phi} + 2a'\eta_i'\dot{\Phi}^2 + a''\eta_i\dot{\Phi}^2 + \\
+ a'\eta_i\dot{\Phi}'\dot{\Phi} - 2\omega_1(a\zeta'_i + a'\zeta_i)\dot{\Phi} + \\
+ 2\omega_3(a\xi_i' + a'\xi_i)\dot{\Phi} - a\eta_i(\omega_3^2 + \omega_1^2) + \\
+ a\omega_2\omega_3\zeta_i + a\omega_2\omega_1\xi_i - a\omega_1'\zeta_i\dot{\Phi} + \\
+ a\omega_3'\xi_i\dot{\Phi} + w_2 = Y_i, \\
a\zeta_i\dot{\Phi}^2 + a\zeta_i'\dot{\Phi}'\dot{\Phi} + 2a'\zeta_i'\dot{\Phi}^2 + a''\zeta_i\dot{\Phi}^2 + \\
+ a'\zeta_i\dot{\Phi}'\dot{\Phi} - 2\omega_2(a\xi_i' - a'\xi_i)\dot{\Phi} + 2\omega_1(a\eta_i' + \\
+ a'\eta_i)\dot{\Phi} - a\zeta_i(\omega_1^2 + \omega_2^2) + a\omega_3\omega_1\xi_i + \\
+ a\omega_3\omega_2\eta_i - a\omega_2'\xi_i\dot{\Phi} + a\omega_1'\eta_i\dot{\Phi} + w_3 = Z_i,
\end{gathered}\right\} \tag{3}$$

где штрихами обозначено дифференцирование по новой независимой переменной Φ.

Для определения времени к системе (3) нужно добавить уравнение $dt/d\Phi = 1/\dot{\Phi}$ или конечное соотношение $t = t(\Phi)$, получаемое путем вычисления обратной функции от заданной функции $\Phi(t)$. Тогда в качестве произвольного решения системы (3) можно рассматривать совокупность функций

$$\begin{gathered} \xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi),\ t(\Phi), \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{4}$$

Подвижную систему координат, в которой существует это решение, можно задать функциями

$$a(\Phi),\ w_1(\Phi),\ w_2(\Phi),\ w_3(\Phi),$$
$$\omega_1(\Phi),\ \omega_2(\Phi),\ \omega_3(\Phi).$$

Систему уравнений (3) удобно использовать при исследованиях строгих частных решений задачи и решений, близких к этим частным решениям, так как соответствующим выбором подвижной системы координат эти частные решения можно сделать постоянными.

Из уравнений (3) как частный случай можно получить уравнения в координатах Нехвила в ограниченной задаче трех тел [4]. Для этого начало A следует совместить с центром масс системы и положить

$$n = 3,\ m_3 = 0,\ \zeta_1 = \zeta_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0,\ w_1 = w_2 = w_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 0,\ \Phi = v,\ \omega_3 = \dot{\Phi} = \dot{v},$$
$$\Delta_{12} = r,\ a = \frac{r}{p},\quad r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

где v, p, e — соответственно истинная аномалия, фокальный параметр и эксцентриситет орбиты основных тел.

Для уравнений (3) сохраняются свойства симметрии решений, а именно для любого исходного решения (4) уравнения (3) допускают также решения, симметричные относительно координатных плоскостей и направления отсчета угла Φ в некоторых симметричных системах координат. Вид симметричных решений приводится в табл. 1. В существовании этих решений можно убедиться непосредственной проверкой удовлетворения системе (3) указанных решений. Возможны также взаимные комбинации решений, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

№	Симметрия	Вид решения, симметричного решению (4)	Вид функций, определяющих систему координат, в которой существует симметричное решение
1	относительно плоскости $A\eta\zeta$	$-\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi),\ t(\Phi)$	$a(\Phi),\ -w_1(\Phi),\ w_2(\Phi),\ w_3(\Phi),\ \omega_1(\Phi),\ -\omega_2(\Phi),\ -\omega_3(\Phi)$
2	относительно плоскости $A\xi\zeta$	$\xi_i(\Phi),\ -\eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi),\ t(\Phi)$	$a(\Phi),\ w_1(\Phi),\ -w_2(\Phi),\ w_3(\Phi),\ -\omega_1(\Phi),\ \omega_2(\Phi),\ -\omega_3(\Phi)$
3	относительно плоскости $A\xi\eta$	$\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ -\zeta_i(\Phi),\ t(\Phi)$	$a(\Phi),\ w_1(\Phi),\ w_2(\Phi),\ -w_3(\Phi),\ -\omega_1(\Phi),\ -\omega_2(\Phi),\ \omega_3(\Phi)$
4	относительно направления отсчета времени	$\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi),\ -t(\Phi)$	$a(\Phi),\ w_1(\Phi),\ w_2(\Phi),\ w_3(\Phi),\ -\omega_1(\Phi),\ -\omega_2(\Phi),\ -\omega_3(\Phi)$
5	относительно направления отсчета угла Φ	$\xi_i(-\Phi),\ \eta_i(-\Phi),\ \zeta_i(-\Phi),\ t(-\Phi)$	$a(-\Phi),\ w_1(-\Phi),\ w_2(-\Phi),\ w_3(-\Phi),\ \omega_1(-\Phi),\ \omega_2(-\Phi),\ \omega_3(-\Phi)$

Эти симметричные решения существуют в общей задаче многих тел. Более интересные симметричные решения можно получить при некоторых ограничениях, налагаемых на общую задачу многих тел. В частности, возможно существование таких решений, согласно которым некоторая часть тел (первые k тел) движется по своим исходным траекториям, а оставшаяся часть тел ($n-k$ тел) — по траекториям, симметричным своим исходным. Такие решения в задаче многих тел существуют лишь при ограничениях, заключающихся в требовании определенной симметричности траекторий движения первых k тел. Наибольший интерес при этом представляют симметричные решения в одной и той же системе координат, которые могут существовать при определенных ограничениях, налагаемых на движение относительной подвижной системы координат, и при определенном выборе системы координат. Если произвольное исходное решение уравнений (3) в системе координат, заданной функциями

$$a(\Phi),\ \varpi_1(\Phi),\ \varpi_2(\Phi),\ \varpi_3(\Phi),$$

$$\omega_1(\Phi),\ \omega_2(\Phi),\ \omega_3(\Phi),$$

записать в виде

$$\begin{gathered}\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi), \quad (i=1, 2, \ldots, k),\\ \xi_j(\Phi),\ \eta_j(\Phi),\ \zeta_j(\Phi),\ t(\Phi), \quad (j=k+1, \ldots, n),\end{gathered} \tag{5}$$

то симметричные решения в той же системе координат представляются в виде, указанном в табл. 2, где также приведены условия их существования. Доказать существование этих решений можно исходя из решений, данных в табл. 1. Например, решение № 3 табл. 2 получается путем комбинации решений № 2—5 табл. 1 с учетом ограничений на движение первых k тел и системы координат. Как видно из табл. 2, основным требованием к преобразованию сжатия является требование четности функции $a(\Phi)$, а для функции $\Phi(t)$ — требование ее нечетности.

Таблица 2

№	Вид решения, симметричного решению (5) ($i=1, 2, \ldots, k$; $j=k+1, \ldots n$)	Условия существования	
		ограничения на движение первых k тел ($i=1, 2, \ldots, k$)	ограничения на движение относительной системы координат
1	$\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ 0,$ $\xi_j(\Phi),\ \eta_j(\Phi),\ -\zeta_j(\Phi)$ $t(\Phi)$	$\zeta_i(\Phi)\equiv 0$	$\varpi_3(\Phi)\equiv 0,$ $\omega_1(\Phi)\equiv 0,$ $\omega_2(\Phi)\equiv 0$
2	$\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi),$ $\xi_j(-\Phi),\ -\eta_j(-\Phi),\ \zeta_j(-\Phi),$ $t(\Phi)$	$\xi_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi)$ — четные, $\eta_i(\Phi)$ — нечетные функции	$\Phi(t)$ — нечетная, $a,\ \varpi_1,\ \varpi_3,$ $\omega_1,\ \omega_3$ — четные по Φ; $\varpi_2,\ \omega_2$ — нечетные по Φ
3	$\xi_i(\Phi),\ \eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi),$ $\xi_j(-\Phi),\ -\eta_j(-\Phi),\ -\zeta_j(-\Phi),$ $t(\Phi)$	$\xi_i(\Phi)$ — четные, $\eta_i(\Phi),\ \zeta_i(\Phi)$ — нечетные функции	$\Phi(t)$ — нечетная, $a,\ \varpi_1,\ \omega_2,$ ω_3 — четные по Φ; $\varpi_2,\ \varpi_3,\ \omega_1$ — нечетные функции Φ

Если рассмотреть как частный случай уравнения в координатах Нехвила, то решения табл. 2 преобразуются к виду, полученному в работе [2].

В дополнение к табл. 2 следует указать, что возможно существование симметричных решений и в случае, если функция $\Phi(t)$ является четной. При этом нарушается условие монотонности функции $\Phi(t)$, и брать ее в качестве независимой переменной неудобно ввиду многозначности обратной функции, поэтому здесь лучше вернуться к независимой переменной t. Приведем лишь одно решение для этого случая, важное при наличии точек возврата в траекториях движения тел:

$$\xi_i(t),\ \eta_i(t),\ \zeta_i(t),\ \xi_j(-t),\ \eta_j(-t),\ \zeta_j(-t).$$

Условия существования этого решения: ξ_i, η_i, ζ_i, a, w_1, w_2, w_3 — четные функции времени; ω_1, ω_2, ω_3 — нечетные.

Для ограниченной задачи трех тел это решение говорит об обратимости движения тела нулевой массы, что возможно только в ограниченной прямолинейной задаче трех тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miele A. «Astronautica Acta», 1960, 6, 225.
2. Лукьянов Л. Г. «Астрон. ж.», 1978, 55, 156.
3. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., 1944.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М. 1964.

ГАИШ

Поступила в редакцию 14.03.78