

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12:531.51

В. Н. ПОНОМАРЕВ, А. А. ЦЕЙТЛИН

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ В ОТО

Уравнения гравитационного поля были получены Эйнштейном феноменологически, как удовлетворяющие определенным физическим постулатам. Одновременно они были выведены Гильбертом [1] из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \\ + \oint_{\partial\Omega} \Phi g^{\mu\kappa} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} - \delta^{\lambda}_{(\mu} \delta \Gamma^{\rho}_{\kappa)\rho}) \sqrt{-g} dS_{\lambda} = 0, \quad (1)$$

где

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ R^{\lambda}_{\mu\kappa\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 g_{\rho\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \right] + \\ + \Gamma^{\lambda}_{\rho\kappa} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\kappa}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}); \quad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}).$$

Отсюда уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 0$ получаются тогда и только тогда, если поверхностный член в (1) в силу граничных условий обращается в нуль, т. е. когда вариационный принцип согласован с краевой задачей соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа [2, 3], поскольку граничные условия дают ограничения на пробные функции, а тем самым на класс вариационных задач [4, 5].

Уравнения Эйнштейна являются уравнениями второго порядка относительно метрики $g_{\mu\nu}$, поэтому краевая задача для них ставится, например, как задача Дирихле $g_{\mu\nu}|_{\partial\Omega} = a_{\mu\nu}$. Однако условий $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ недостаточно для того, чтобы обратить в нуль поверхностный член в (1). Исключения составляют лишь гравитационные поля островных материальных конфигураций (асимптотически плоские метрики).

Вообще говоря, можно утверждать, что данная краевая задача получается из некоторого вариационного принципа $\delta S = 0$: а) если мы решаем систему уравнений Эйлера — Лагранжа при граничных условиях, полученных из условия стационарности соответствующего определенного интеграла S , б) если полученные из условия стационарности S граничные условия не противоречат порядку уравнений Эйлера — Лагранжа, т. е. соответствующий лагранжиан является собственным (невырожденным).

Собственным (невыврожденным) для данной краевой задачи называется лагранжиан, не являющийся линейным по старшим производным функций поля [6]. Из этого определения следует, что лагранжиан гравитационного поля $\mathcal{L}_g = R\sqrt{-g}$ является вырожденным.

Проиллюстрируем сказанное на примере из механики. Пусть даны два лагранжиана [7] $\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} \ddot{q}\ddot{q}$, $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 (q - \text{обобщенная координата, точка обозначает дифференцирование по времени})$. В некотором смысле $\mathcal{L}_1$ аналогичен $\mathcal{L}_g$, а $\mathcal{L}_2$ — так называемому «усеченному» лагранжиану $\mathcal{L}_D = g^{\mu\nu} (-\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda})$ [8]. Вариации соответствующих функционалов действия имеют вид

$$\delta S_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q} \delta q dt - \frac{1}{2} \dot{q} \delta \dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{2} \dot{q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (2)$$

$$\delta S_2 = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q} \delta q dt + \frac{1}{2} \dot{q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (3)$$

Из (2) мы видим, что необходимо задать $q(t_1)$, $q(t_2)$, $\dot{q}(t_1)$, $\dot{q}(t_2)$, чтобы получить уравнение движения $\ddot{q}=0$. Это, однако, невозможно из-за порядка этих уравнений. Попытка в (2) задать только два условия $q/\dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2}$ не приводит, как легко видеть, к физически осмысленному результату. Что касается (3), то из обычной вариационной задачи с закрепленными концами $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, согласованной с координатной краевой задачей, следует уравнение $\ddot{q}=0$.

Возвращаясь к вариационному принципу в ОТО, следует отметить, что «усеченный» лагранжиан $\mathcal{L}_D$ является собственным для уравнения Эйнштейна. Интересно заметить, что хотя $\mathcal{L}_D$ не является общековариантным скаляром, тем не менее именно $\mathcal{L}_D$ (а не $\mathcal{L}_g$) следует из компенсационного подхода к ОТО, как калибровочной теории группы трансляции T_4 [8—10].

$$\mathcal{L}_D \equiv \mathcal{L}_{T_4} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} C_{ijk} C^{ijk} + \frac{1}{2} C_{\mu k} C^{\mu k} - C_{\mu}^{\mu} C^k{}_k \right),$$

$C^i{}_{jk}$ — объект неголономности или напряженность калибровочного поля с потенциалами $(\delta^a{}_{\mu} - h^a{}_{\mu})(h^a{}_{\mu} - \text{тетрадные коэффициенты})$.

В соответствии с принципами теории калибровочных полей $\mathcal{L}_{T_4}$ является квадратичным по напряженности поля.

В заключение отметим, что ряд авторов рассматривал граничный член в (1) [13, 14] с различными целями. В частности, в [13] указывается на невозможность обратить в нуль этот член при разумных граничных условиях для уравнения Эйнштейна.

После завершения данной работы мы узнали о статье Гиббонса и Хокинга [14], где в качестве гравитационного действия предлагается

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int_M R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} K \sqrt{-g} d^3x. \quad (4)$$

Здесь обычное гильберт-эйнштейновское действие дополнено «поверхностным членом» (K — разность следов второй фундаментальной фор-

мы границы ∂M в метрике g и в метрике плоского пространства). Поверхностный член признан компенсировать вклад вторых производных от метрики в R , чтобы оно было квадратично по первым производным, как это требуется в методе континуального интегрирования, в рамках которого (4) применялось в [14, 15] для квантования гравитационного поля. (Применение (4) к ряду проблем квантовой гравитации см. также в [16].)

Остается заметить, что выбор (4) в качестве гравитационного действия исправляет тот недостаток гильберт-эйнштейновского действия, который был отмечен в данной статье (фактически дело сводится к оперированию с «усеченным» лагранжианом), а потому с нашей точки зрения является необходимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hilbert D. Nachr. Göttingen, Math.-Phys. Kgl., 1915, H 3, p. 395.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М.—Л., 1930, гл. 4, § 5.
3. Klein F. Nachr. Kgl. Ges. Wiss., Göttingen, 1918, p. 171.
4. Ландош К. Вариационные принципы механики. М., 1965, гл. 2.
5. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, 1969, гл. 6, § 4.
6. Kuo-Shung Cheng. «J. Math. Phys.», 1974, 15, 808.
7. Дирак П. А. Д. Новейшие проблемы гравитации. М., 1961.
8. Utiyama R. «Phys. Rev.», 1956, 101, 1597.
9. Kerlick G. D. Thesis Ph. Princeton Univ., 1975.
10. Cho Y. M. «Phys. Rev.», 1976, D14, 2521.
11. Эддингтон А. С. Математическая теория относительности. М., 1934.
12. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. М., 1969, § 16.
13. Седов Л. И. «Успехи мат. наук», 1965, 20, 125.
14. Gibbons G. W., Hawking S. W. «Phys. Rev.», 1977, D15, 2752.
15. Gibbons G. W., Hawking S. W. «Nucl. Phys.», 1978, B138, 141.
16. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. «Phys. Lett.», 1978, 77B, 262.

Кафедра
теоретической физики

Поступила в редакцию
13.06.78