УДК 539.12.01

Ю. Г. ПАВЛЕНКО

СПЕКТР ФОТОНОВ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОЛЮ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В физике высоких энергий неупругие процессы играют определяющую роль. Однако теоретическое описание этих процессов наталкивается на существенные математические трудности. По этой причине представляют интерес приближенные методы, позволяющие достаточно просто исследовать различные характеристики в некоторых областях фазового пространства конечных частиц. В целом ряде работ успешно применялся метод Вайцзекера — Вильямса и его модификации [1—6].

В настоящее время возрос интерес к исследованию неупругих процессов при наличии внешних полей. Влияние поля будет заметным, если длина формирования процесса не меньше длины, на которой поле отклоняет частицы на значительные углы. Для вычисления эффектов первого и более высокого порядков по постоянной тонкой структуры особенно перспективной оказалась модель скрещенного поля, поскольку, как было впервые показано Никишовым и Ритусом [7], результаты расчетов, записанные в инвариантном виде, справедливы для постоянного поля $F_{\mu\nu}$ произвольного вида. В настоящей работе методика [7] используется для обобщения приближения эквивалентных фотонов при расчете процессов в постоянном внешнем поле.

Рассмотрим столкновение частиц с 4-импульсами p_1 и p_2 и зарядами e и Ze в скрещенном поле, вектор-потенциал которого $A_\mu=a_\mu\varphi$, $\varphi=kx$. Будем считать, что частица p_2 является бесспиновой с зарядом Ze и в системе покоя $p_1=0$, $\varepsilon_2\gg m_2$. В результате столкновения образуется группа частиц с суммарным импульсом p', а частица p_2' приобретает импульс p_2'. Элемент S-матрицы рассматриваемого процесса:

$$S=(2\pi)^4\int ds\,ds_1\,\frac{4\pi Ze^2}{q^2(s_1)}\,j_\mu(s_1)\,J^\mu(s-s_1),$$
$$\delta^{(4)}(p_1+p_2+sk-p'-p_2')\,\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_1 2\varepsilon_2 2\varepsilon_2'\ldots}}. \tag{1}$$

Здесь $q(s_1)=p'-p-s_1k$, j_μ — ток процесса $p_1+q=p'$ с виртуальным фотоном q_μ, J_μ — фурье-образ вершинного тока частицы p_2:

$$J_\mu(s)=\frac{1}{2\pi}\int\bar\psi_{p_2'}\,\overleftrightarrow{\pi}\,\psi_{p_2}\,e^{-i(p_2'-p_2)x+is\varphi}\,d\varphi, \tag{2}$$

где ψ_p — функция Волкова [7],

$$\psi_p=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{iS_p},\quad S_p=-px+W,\ W=\frac{1}{2kp}\int[(p-eA)^2-m^2]\,d\varphi,$$

удовлетворяющая уравнению Клейна — Гордона.

Сечение процесса

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)} (p_1 + p_2 + sk - p' - p_2') \frac{(4\pi Ze^2)^2}{4I} \cdot \frac{j_\mu (s_1)}{q^2 (s_1)} \times$$

$$\times \frac{j_\nu^* (s_1')}{q^2 (s_1')} \cdot J^\mu (s - s_1) J^{\nu^*} (s - s_1') \, ds \, ds_1 \, ds_1' \frac{dp_2'}{2\varepsilon_2' (2\pi)^3} \frac{d\rho'}{\delta (0)}, \quad (3)$$

где $d\rho' = \Pi \frac{dp'}{2\varepsilon' (2\pi)^3}$ — статистический вес конечных частиц,

$$I^2 = (p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2.$$

Ток J_μ можно записать в более простой форме, если представить его в виде

$$J_\mu (s) = \frac{1}{2\pi} \int (-\partial_\mu S_{p_2} - \partial_\mu S_{p_2'} - 2eA_\mu) e^{i\Phi} d\varphi, \quad (4)$$

$$\Phi = s\varphi + W_{p_2} - W_{p_2'}$$

и использовать соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\varphi} e^{i\Phi} d\varphi = 0. \quad (5)$$

Учитывая (5) и закон сохранения (1), найдем

$$J_\mu (s - s_1) = \frac{1}{\pi} \int \left(- \partial_\mu S_{p_2} - eA_\mu - \frac{q_\mu}{2} \right) e^{i\Phi} d\varphi. \quad (6)$$

Далее фурье-образ тока J_μ удобно записать в виде интеграла по классической траектории. С этой целью, используя полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби S, запишем закон движения $x_\mu (\tau)$ и 4-импульс $mu_\mu (\tau)$ в параметрическом виде (φ — параметр):

$$-\frac{\partial S}{\partial p^\mu} = x_{0\mu}, \quad mu_\mu = -\partial_\mu S - eA_\mu. \quad (7)$$

Параметр φ связан с собственным временем соотношением $m\varphi = kp\tau$. Учитывая (7), можно показать, что фаза в (6)

$$\Phi = \frac{kp_2}{kp_2'} \left(qx (\tau) - \frac{qp_2}{m_2} \tau \right) + (s - s_1) \frac{kp_2}{m_2} \tau.$$

Теперь вершинный ток можно представить в виде

$$J_\mu (s) = \frac{1}{2\pi} \int [2m_2 u - q]_\mu \exp \left[\frac{ikp_2}{kp_2'} \left(qx - \frac{qp_2}{m_2} \tau \right) + \frac{iskp_2}{m_2} \tau \right] \frac{dkp_2\tau}{m_2}. \quad (8)$$

Выражение (8) имеет явный градиентно инвариантный вид и является точным в случае движения частицы в скрещенном поле. Согласно идеологии работ [7] ток в форме (8) можно использовать при рассмотрении процессов в любом однородном поле. При этом необходимо, чтобы

$$\chi = \frac{e}{m^3} \sqrt{(F^{\mu\nu} p_\nu)^2}, \quad f = \frac{e^2}{2m^2} (F_{\mu\nu})^2 \ll 1.$$

Для однородного магнитного поля множитель $\frac{kp_2}{kp_2'} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - q_0}$ получен в [4] «распутыванием» экспоненциальных операторных выражений.

Далее, учитывая (8), найдем

$$J_\mu (s - s_1) J_\nu^* (s - s_1') = \delta (s_1 - s_1') \Gamma_{\mu\nu},$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)} \int \left[2mu \left(-\frac{\varphi}{2} \right) - q \right]_\mu \left[2mu \left(\frac{\varphi}{2} \right) - q \right]_\nu \times$$
$$\times \exp \left\{ -\frac{ikp_2}{kp_2'} \left[qx \left(-\frac{\varphi}{2} \right) - qx \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] + \frac{iqp_2}{kp_2'} \varphi - i(s - s_1) \varphi \right\} d\varphi. \tag{9}$$

После подстановки (9) в (3) и интегрирования по $d^3 p_2' ds$, запишем (3) в форме, удобной для перехода к приближению квазиреальных фотонов:

$$d\sigma = \frac{(\sqrt{4\pi}\ Ze)^2}{4I} \Gamma^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \frac{d^4 q}{q^4 (2\pi)^3 2k (p_2 - q)},$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int [2mu (-\tau/2) - q]_\mu [2mu (\tau/2) - q]_\nu \times$$
$$\times \exp \left[-\frac{ikp_2}{kp_2'} aq \right] \frac{dkp_2 \tau}{m_2}, \tag{10}$$

$$L_{\mu\nu} = \frac{4\pi e^2}{2\lambda + 1} \int (2\pi)^4 \delta (p_1 + q + s_1 k - p') j_\mu (s_1) j_\nu^* (s_1) d\rho' \frac{ds_1}{\delta (0)},$$

где λ — спин частицы p_2,

$$a_\mu = u_\mu \tau + \ddot{u}_\mu \frac{\tau^3}{24} - \frac{q_\mu}{2m_2} \tau.$$

Тензор $L_{\mu\nu}$ можно разложить по инвариантным структурным функциям:

$$L_{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu\nu} W_1 + \frac{1}{m_1^2} (\Lambda p_1)_\mu (\Lambda p_1)_\nu W_2, \tag{11}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2$$

и выразить последние через сечение процесса $p_1 + q = p'$ с поперечным σ_T и продольным σ_L виртуальным фотоном с помощью (П.1), (П.2) (см. Приложение).

Учитывая (П.3), из (10) получим

$$d\sigma = -\frac{(\sqrt{4\pi}\ Ze)^2}{q^4} \frac{I_q}{I} \left\{ \left(\Gamma_1 + \frac{q^2 \Gamma_2}{I_q^2} \right) \sigma_T + \frac{q^2 \Gamma_2}{I_q^2} \sigma_L \right\} \frac{d^4 q}{(2\pi)^3 2k (p_2 - q)}, \tag{12}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_\mu^\mu, \quad \Gamma_2 = \Gamma_{\mu\nu} p_1^\mu p_1^\nu, \quad I_q^2 = (p_1 q)^2 - m_1^2 q^2.$$

В том случае, когда применимо приближение квазиреальных фотонов, спектральное распределение по энергиям определяется первым членом в (12):

$$dn = -\frac{(\sqrt{4\pi}\, Ze)^2}{q^4} \frac{I_q}{I} \left(\Gamma_1 + \frac{q^2 \Gamma_2}{I_q^2}\right) \frac{d^4 q}{(2\pi)^3 2k (p_2 - q)}. \tag{13}$$

Далее ограничимся учетом в (13) главного логарифмического вклада. Поэтому при интегрировании (13) по собственному времени опустим величины $\sim \frac{m_2^3 m_1^3 \chi_2}{\eta \nu^2}$ $(\nu = p_1 p_2,\ \eta = p_1 q)$.

$$dn = -\frac{2(\sqrt{4\pi}\ Ze)^2}{m_2 q^4} \frac{I_q}{I} \left(\gamma_1 + \frac{q^2 \gamma_2}{I_q^2}\right) \sqrt{\pi}\, (q\ddot{u}_2)^{-1/3} \times$$

$$\times \left(\frac{\chi_2}{\chi_2'}\right)^{2/3} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Phi(x), \tag{14}$$

$$x = \left(\frac{\chi_2}{\chi_2'}\right)^{2/3} (q\ddot{u}_2)^{-1/3} \left(qu_2 - \frac{q^2}{2m_2}\right), \quad \gamma_{\mu\nu} = (2p_2 - q)_\mu (2p_2 - q)_\nu.$$

Здесь $\Phi(x)$ — функции Эйри. Интегрирование по $d^4 q$ удобно провести в системе покоя частицы p_1, а затем восстановить инвариантную форму записи. В системе

$$p_1 = (m_1, 0), \quad p_2 = (\varepsilon_2, p_2), \quad m\ddot{u}_2 = (0, -p_2\omega^2), \quad \omega = \chi_2 \frac{m_2^2 m_1}{\nu}, \quad m_2 \varepsilon_2 = \nu.$$

Функция Эйри может быть представлена в виде

$$\Phi(x) = -\frac{d\Phi_1}{dx}, \quad \Phi_1 = \int\limits_x^\infty \Phi(x)\, dx, \quad \Phi(\infty) = 0, \quad \Phi(-\infty) = \sqrt{\pi},$$

где $\Phi_1(x)$ ведет себя подобно ступенчатой функции $\sqrt{\pi}\ \theta(-x-1,02)$ [8]. По этой причине для вычисления интеграла (14) по переменной $dq_\parallel$ $(q_\parallel = \mathbf{qp}_2/p_2)$ можно использовать метод хорошо известный в физике твердого тела [9]. Вычисляя интеграл, получим $(s_1 = (p_1+q)^2)$:

$$dn = \frac{(Ze)^2}{2\pi} \left(\frac{\nu}{I}\right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{\nu} + \frac{I_q^2 m_2^2}{\nu^2 q^2}\right) \frac{ds_1}{I_q} \cdot \frac{dq^2}{q^2}, \tag{15}$$

где $q_\parallel$ удовлетворяет уравнению

$$2p_2 q - q^2 = -\left(\frac{q\ddot{u}_2 \chi_2'^2}{\chi_2^2}\right)^{1/3} m_2. \tag{16}$$

Область изменения переменных s_1 и q^2 можно найти из неравенств

$$(\sqrt{s} - m_1)^2 \geqslant s_1 \geqslant p'^2, \quad |q^2_{\min}| < |q^2| < |q^2_{\max}|, \quad (s = (p_1 + p_2)^2),$$

где $q^2_{\min}$, $q^2_{\max}$ определяются из уравнения

$$0 = q^2\left(1 - \frac{x}{\nu}\right) + \left(\frac{m_2 x}{\nu}\right)^2 + \frac{q^4}{4\nu^2}(2\nu + m_2^2) -$$

$$-2\left[x - \frac{q^2}{2}\left(1 + \frac{m_1^2}{\nu}\right)\right]^{4/3} \left(\frac{\nu \chi_2 m_2^3}{I^3}\right)^{2/3} \qquad (2x = s_1 - m_1^2).$$

В области $|q^2| \ll \eta$, $|q^2_{\max}|$ величина $x \sim \eta$,

$$-q^2_{\min} = \frac{m_2^2 \eta^2}{\nu} \left[1 + 2\left(\frac{\chi_2 \nu}{\eta}\right)^{2/3}\right] \left[\nu - \eta - \frac{4}{3} m_2^2 \left(\frac{x\chi_2^2}{\nu}\right)^{1/3}\right]^{-1}. \quad (17)$$

После интегрирования получим главный логарифмический вклад

$$dn = \frac{(Ze)^2}{\pi} \ln \left|\frac{q^2_{эф}}{q^2_{\min}}\right| \frac{d\eta}{\eta}. \quad (18)$$

Величина $q^2_{эф}$ определяется конкретным видом процесса $p_1 + q = p'$. Соотношение (18) определяет спектр фотонов, эквивалентных полю быстрой частицы, движущейся в произвольном однородном внешнем поле. Сделаем несколько замечаний.

1. При выводе (18) мы учли эффект отдачи частицы p_2. По этой причине (18) имеет большую область применимости, чем приближение Вайцзекера — Вильямса. 2. Полученный результат справедлив для произвольного слабонеоднородного электромагнитного поля. 3. Частота η фиксируется энергией частиц p', образовавшихся при столкновении. 4. При возрастании поля формула (18) применима и при условии $\chi_2\nu \gg \eta$. 5. Аналогичное выражение, полученное в работе [10] в приближении Вайцзекера — Вильямса, отличается от (18) и совпадает с ним в случае $\chi_2\nu \gg \eta$.

Представляет интерес оценка спектра эквивалентных фотонов в рамках классической теории поля.

Если предположить, что в процессе взаимодействия состояние частицы p_2 не меняется, то она будет играть роль источника классического поля. В этом случае ее поведение определяется решением уравнения движения $m\dot{u}^\mu = ZeF^{\mu\nu} u_\nu$, где $F_{\mu\nu}$ — тензор внешнего поля.

Электромагнитное поле, создаваемое частицей p_2, определяется вектор-потенциалом A_2, удовлетворяющим уравнению Даламбера:

$$A_\mu(x) = -\frac{4\pi Ze}{2m_2} \int J_\mu(q)\, e^{-iq(x-x_0)} \frac{d^4q}{q^2 (2\pi)^4}, \quad (19)$$

$$J_\mu(q) = \int 2m_2 u_\mu(\tau)\, e^{-iq(x(\tau)-x_0)}\, d\tau,$$

где $x = x(\tau)$ — уравнение траектории, $x_{0\mu} = x_\mu(0)$. В системе покоя $p_1 = (m_1, 0)$, $x_0 = (0, \rho_x, \rho_y, 0)$. Поток энергии, создаваемый p_2, равен

$$\mathbf{S}(t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}[\beta \mathbf{E}]], \quad \beta = \frac{\mathbf{u}_2}{u_2}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) можно найти выражение для спектра энергии виртуальных фотонов, излученных в направлении q, которое отличается от (18) членами, учитывающими отдачу p_2. В классической теории, в приближении Вайцзекера — Вильямса интересуются потоком виртуальных фотонов, излученных в направлении импульса $\mathbf{p}_2$. Соответствующее выражение для плотности числа фотонов можно найти из уравнения

$$\int \hbar q_0 n(q_0)\, dq_0 = \frac{c}{4\pi} \int [\mathbf{E}\mathbf{p}_2]^2 \varepsilon_2 \frac{d\rho_x\, d\rho_y\, dt}{m_2^2 p_2} \qquad (m_1 q_0 = \eta). \quad (21)$$

Подставляя в (21) значение E, найдем

$$dn(q_0) = 4(Ze)^2 \frac{\varepsilon_2}{m_2 q_0} \frac{[\mathbf{q}\mathbf{p}_2]^2}{p_2^2} e^{-iqa} \frac{d\tau\, d^4 q}{q^4 (2\pi)^3}.$$

Это выражение совпадает с (13), если в последнем пренебречь отдачей частицы p_2.

В заключение автор выражает благодарность участникам семинара А. А. Соколова за обсуждение работы.

Приложение

$$\Pi_T^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1,2} e_\lambda^\mu e_\lambda^\nu = -\Lambda^{\mu\nu} - \frac{q^2}{I_q^2} (\Lambda p)^\mu (\Lambda p)^\nu.$$

$$\Pi_L^{\mu\nu} = e_3^\mu e_3^\nu - e_0^\mu e_0^\nu. \qquad (\text{П.1})$$

$$\sigma_T = \frac{1}{4I_q} \frac{1}{2} \Pi_T^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = \frac{1}{4I_q} W_1.$$

$$\sigma_L = \frac{1}{4I_q} \Pi_L^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = \sigma_T + \frac{I_q}{4q^2} W_2. \qquad (\text{П.2})$$

$$L^{\mu\nu} = 4I_q \Pi_T^{\mu\nu} \sigma_T + \frac{4q^2 m^2}{I_q} (\Lambda p)^\mu (\Lambda p)^\nu \sigma_L. \qquad (\text{П.3})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Померанчук И. Я., Шмушкевич И. М. «Nucl. Phys», 1961, **23**, 452.
2. Файнберг Е. Л., Чернавский Д. С. «Успехи физ. наук», 1964, **82**, 3.
3. Грибов В. Н., Колкунов В. А., Окунь Л. Б., Шехтер В. М. ЖЭТФ, 1962, **14**, 1308.
4. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М., 1973.
5. Kessler P. «Nuovo Cim.», 1960, **17**, 809; «Acta Phys. Austriaca», 1975, **41**, 141.
6. Min-Shin Chen, Peter Zerwas. «Phys. Rev.», 1975, **12**, N 1, 11.
7. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 1964, **46**, 776; ЖЭТФ, 1964, **46**, 1768.
8. Ритус В. И. В сб.: «Проблемы теоретической физики». М., 1972, с. 306.
9. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1962.
10. Байер В. Н., Катков В. М. ДАН СССР, 1972, **207**, № 1, 68.

Кафедра
теоретической физики

Поступила в редакцию
21.12.77
После переработки
26.12.78