УДК 533.951.7

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ, П. А. ПОЛЯКОВ

К ВОПРОСУ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА С ТЕПЛОВЫМ РАЗБРОСОМ СКОРОСТЕЙ

Неустойчивость системы плазма-пучок, обусловленная возбуждением высокочастотных плазменных колебаний, была открыта Ахиезером и Файнбергом [1], Бомом и Гроссом [2]. Впоследствии этот вопрос рассматривался многими авторами (см., например, [3]). Исследование устойчивости ленгмюровских колебаний проводилось, как правило, на основе классического уравнения Власова. При этом в качестве единственной причины, препятствующей появлению неустойчивости в бесстолкновительной плазме, рассматривалось только затухание Ландау. Однако, как впервые было показано в работах [4], [5], имеет место радиационное затухание волн в плазме, которое во многих практически важных случаях превосходит затухание Ландау. Поэтому представляет интерес рассмотреть неустойчивость с учетом радиационного затухания.

Рассмотрим релятивистское дисперсионное уравнение для продольных волн в плазме с волновым вектором **k**, параллельным средней скорости частиц пучка **V**. В этом случае можно воспользоваться дисперсионным соотношением, полученным в работе [5]:

$$1-\frac{4\pi e^2}{\theta k_1}\int\limits_L \frac{u^0 u_1 F_0}{k_0u^0+k_1u^1}\,d\Omega - i\,\frac{8\pi e^4}{3m^2c^4k_1}\int\limits_L \frac{u^0\,(k_0u_1-k_1u_0)}{k_0u^0+k_1u^1}\,F_0 d\Omega = 0. \quad (1)$$

Здесь $d\Omega = c^3d^3u/u_0$, u^{α} — 4-вектор скорости частиц, θ — температура плазмы, $k^{\alpha}=\{\omega/c,\ k\}$, F_0 — релятивистская функция распределения Максвелла.

Уравнение (1) можно записать в инвариантном виде, справедливом для любого релятивистского стационарного распределения:

$$1+4\pi r_0\int\limits_L \frac{u_0u^0+u_1u^1}{(k_0u^0+k_1u^1)^2}\left(1-i\,\frac{2}{3}\,r_0k_0u^{\sigma}\right)F_0(u)\,d\Omega=0,\quad \left(r_0=\frac{e^2}{mc^2}\right). \quad (2)$$

Соотношение (2) записано в системе координат, в которой $k^{\alpha}=\{k^0,\ k^1,\ 0,\ 0\}$.

Будем полагать, как обычно, [3], что равновесная функция распределения системы плазма-пучок имеет вид

$$F_0 = f_0^{(1)} + f_0^{(2)}, \quad (3)$$

где

$$f_0^{(1)} = n\exp\left\{-\frac{mc^2}{\theta}\,u_0\right\}\Big/\,4\pi m^{-1}c\,\theta K_2\left(\frac{mc^2}{\theta}\right), \quad (4)$$

$$f_0^{(2)} = n_л'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\exp\left\{-\frac{mc^2}{\theta_л'}\,u_0+\frac{mcVu^1}{\theta_л'}\right\}\Big/\,4\pi m^{-1}c\theta_л'K_2\times$$
$$\times\left(\frac{mc^2}{\theta_л'}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right). \quad (5)$$

Здесь $u_0=\sqrt{1-u_l u^l}$ $(l=1, 2, 3)$; n, θ, $n'_л$, $\theta'_л$ — плотности электронов и их температуры в плазме и пучке соответственно в системе координат $S_л$, в которой плазма неподвижна; K_2 — функция Макдональда. Функции (4), (5) представляют собой релятивистские распределения Максвелла частиц плазмы и пучка в системе $S_л$ [6]. Подставляя (3), (4), (5) в (2), получим

$$1+4\pi r_0 \int\limits_L \frac{u_0 u^0+u_1 u^1}{(k_0 u^0+k_1 u^1)}\left(1-i\frac{2}{3} r_0 k_\sigma u^\sigma\right) f_0^{(1)}\, d\Omega +$$

$$+4\pi r_0 \int\limits_L \frac{u'_0 u^{0\prime}+u'_0 u^{1\prime}}{(k'_0 u^{0\prime}+k'_1 u^{1\prime})^2}\left(1-\frac{2}{3} r_0 k'_\sigma u^{\sigma\prime}\right) f_0^{(2)\prime}\, d\Omega' = 0, \qquad (6)$$

где штрихованные величины относятся к системе отсчета S', в которой пучок неподвижен.

Анализ уравнения (6) в общем виде сложен, так как интегралы, входящие в дисперсионное уравнение, не выражаются через известные специальные функции. Мы ограничимся приближенным решением уравнения (6). Для этого разложим подынтегральные функции во втором и третьем слагаемом в ряд по v/c с точностью до $(v/c)^3$ и v/c соответственно. При этом средняя скорость пучка остается произвольной релятивистской. Кроме того, будем полагать, что фазовая скорость волны $V_ф=\omega/k^1$ много больше тепловой скорости частиц плазмы $V_т=\sqrt{\theta/m}$, и поэтому используем разложение [7]:

$$\frac{1}{\omega-k^1 v^1}=\frac{1}{\omega}\left[1+\left(\frac{k^1 v^1}{\omega}\right)+\left(\frac{k^1 v^1}{\omega}\right)^2+\left(\frac{k^1 v^1}{\omega}\right)^3+\dots\right].$$

Используя указанные предположения, уравнение (6) можно привести к виду

$$1-\frac{\Omega^2-i2\omega(\delta_L+\delta_R)}{\omega^2}-\frac{\omega_p'^2}{\omega'^2} I(a')=0, \qquad (7)$$

где

$$\omega'=\gamma(\omega-kV),\quad \gamma=1/\sqrt{1-(V/c)^2},$$

$$\Omega^2=\left(1-\frac{5}{2}\frac{\theta}{mc^2}\right)\omega_p^2+\left(3-\frac{33}{2}\frac{\theta}{mc^2}\right)\frac{\theta}{m}k^2,\quad \left(\omega_p^2=\frac{4\pi e^2 n}{m}\right), \qquad (8)$$

$$\delta_L=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{m}{\theta}\right)^{3/2}\frac{\omega_p^4}{k^3}\exp\left\{-\frac{m}{2\theta}\frac{\omega_p^2}{k^2}-\frac{3}{2}\right\} - \qquad (9)$$

затухание Ландау,

$$\delta_R=\frac{1}{3}\frac{r_0}{c}\omega_p^2\left(1-2\frac{k^2\theta}{\omega_p^2 m}\right) - \qquad (10)$$

радиационное затухание [5],

$$I(a')=-2a'^2(1+a'z(a'))-i2\sqrt{\pi}\,a'^3 e^{-a'^3}+i\,\frac{2}{3}\frac{r_0}{c}\,\omega' a' Z(a'), \qquad (11)$$

$$a'=\frac{\omega'}{k'}\sqrt{\frac{m}{2\theta'}},\quad k'=\gamma\left(k-\frac{\omega}{c}\frac{V}{c}\right),$$

$$Z(a')=\mathrm{V.\ p.}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x-a'} -$$

интеграл вероятности от мнимого аргумента [8]. Для пучков, плотность которых n' значительно меньше плотности плазмы n, последнее слагаемое в (7) будет значительно меньше второго. Поэтому для решения уравнения (7) можно использовать процедуру последовательных приближений. В первом приближении имеем

$$\omega_{(1)}^2 = \Omega^2.$$

Вторая итерация дает

$$\omega_{(2)}^2 = \Omega^2 - 2i\omega_{(1)}(\delta_L + \delta_R) - \omega_{(1)}^2 \frac{\omega_p'^2}{\omega_{(1)}'^2}\left[i2\sqrt{\pi}\, a_{(1)}'^3 e^{-a_{(1)}'^2} - i\frac{2}{3}\frac{r_0}{c}\omega_{(1)}' a_{(1)}' Z(a_{(1)}')\right], \qquad (12)$$

где

$$a_{(1)}' = a'\,|_{\omega=\Omega}.$$

Из уравнения (12) для $\delta = \operatorname{Im}\omega_{(2)}$ получаем выражение

$$\delta = -\delta_L - \delta_R - \Omega\frac{\omega_p^2}{\omega_{(1)}'^2}\left[\sqrt{\pi}\, a_{(1)}'^3 e^{-a_{(1)}'^2} - \frac{1}{3}\frac{r_0}{c}\omega_{(1)}' a_{(1)}' Z(a_{(1)}')\right]. \qquad (13)$$

Эта формула получена для резонансного пучка с $|V_ф - V| \leqslant \sqrt{\theta'/m}$, т. е. $|a'| \leqslant 1$.

Используя таблицы значений функции $Z(a')$ [8], нетрудно прийти к выводу, что при $|a'| \leqslant 1$ и для длин плазменных волн $\lambda \gg r_0\theta'/mc^2$ второе слагаемое в квадратных скобках (13) значительно меньше первого. Кроме того, при $|a'| \leqslant 1$ имеем $1 - V^2\Omega/c^2kV \cong 1/\gamma$.

Тогда

$$\delta = -\delta_L - \delta_R - \Omega\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\gamma^{3/2}\frac{\omega_{рл}'^2}{k^3}\left(\frac{m}{\theta_л'}\right)^{3/2} \times (\Omega - kV)\exp\left[-\gamma\frac{(\Omega - kV)^2 m}{k^2 2\theta_л'}\right]. \qquad (14)$$

При этом использован закон преобразования температуры Планка и Лауэ, $\theta' = \theta_л'\gamma$ [6].

Отличие (14) от аналогичной нерелятивистской формулы [7, с. 366] обусловлено тремя независимыми причинами. Прежде всего в (14) учтены релятивистские поправки по тепловым скоростям частиц плазмы с точностью до v^3/c^3. Это приводит к увеличению инкремента δ по сравнению с его нерелятивистским значением, так как $\Omega \neq \omega_p$ (см. (8)). Далее, наличие релятивистского пучка в плазме приводит к тому, что в резонансной области инкремент увеличивается в $\gamma^{3/2} = (E/mc^2)^{3/2}$ раз. Кроме того, инкремент меньше нерелятивистского на величину радиационного затухания δ_R.

Для оценки интервала скоростей пучка V или фазовых скоростей волн, внутри которого возможно нарастание амплитуд волн, введем понятие эффективной ширины возбуждения продольных плазменных волн. Нижнюю границу этого интервала определим из формулы (14), заменив экспоненту единицей и положив $\delta = 0$. Верхнюю границу определим из условия $a'=1$, т. е. из условия уменьшения $\delta+\delta_L+\delta_R$ в e раз. В результате получим

$$\frac{1}{\gamma^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\delta_L+\delta_R}{\Omega}\,\frac{n}{n_L'}\left(\frac{V_{тл}'}{V_ф}\right)^2<\frac{|\Omega/k-V|}{V_{тл}'}<\sqrt{\frac{2}{\gamma}}. \qquad (15)$$

В соответствии со сказанным выше релятивистские эффекты приводят к уменьшению эффективной ширины возбуждения продольных плазменных волн при больших тепловых скоростях плазмы и релятивистских скоростях пучка по сравнению с шириной аналогичной кривой в нерелятивистской теории.

Как было показано в работе [6], для широкого интервала электронных плотностей (10^9—10^{15}) см$^{-3}$ радиационное затухание значительно превосходит затухание Ландау, начиная с фазовых скоростей волн $V_ф\sim 10\ V_т$. Таким образом, в пределах применимости приведенных вычислений следует положить в (14) и (15) $\delta_L=0$.

Наличие радиационного затухания в плазме приводит к зависимости нижней границы эффективной ширины возбуждения продольных плазменных волн от энергии частиц пучка, т. е. к зависимости вида $\sim(mc^2/E)^{3/2}$. По-видимому, эта зависимость может быть проверена экспериментально.

Найдем максимальное значение инкремента δ. Нетрудно усмотреть, что максимальное дестабилизирующее влияние пучок оказывает при

$$\gamma\,\frac{(\Omega-kV)}{k^2}\,\frac{m}{2\theta_л'}=\frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Поэтому

$$\delta_{max}=-\,\delta_R+\Omega\sqrt{\frac{\pi}{8e}}\,\gamma\,\frac{n_л'}{n}\,\frac{\omega_p^2 m}{k^2\theta_л'}. \qquad (17)$$

Необходимым условием появления пучковой неустойчивости является условие $\delta_{max}>0$. При $\Omega\cong\omega_p$ это условие можно записать в виде (в системе СГС)

$$\gamma\,\frac{n_л'}{n^{3/2}}\left(\frac{V_ф}{V_{тл}'}\right)^2>4{,}3\cdot 10^{-18}. \qquad (18)$$

Например, для $(V_ф/V_{тл}')=10^2$, $n_л'=10^3$ см$^{-3}$, $\gamma\sim 1$ получим, что радиационная диссипация энергии коллективной плазменной волны подавляет пучковую неустойчивость начиная с плотностей частиц плазмы $n\cong 3\cdot 10^{15}$ см$^{-3}$.

Таким образом, мы исследовали влияние на пучковую неустойчивость релятивистских эффектов и радиационного затухания, получили выражения для инкремента, эффективной ширины возбуждения волн и условия появления пучковой неустойчивости. Для некоторых важных систем плазма-пучок найденные формулы приводят к новым физическим следствиям. В частности, в достаточно плотной плазме пучковая неустойчивость может подавляться радиационным затуханием. При больших значениях плотности плазмы и энергии пучка эффективная ширина возбуждения волн может оказаться столь малой, что возбуждение плазменных волн становится практически невозможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. ДАН СССР, 1949, **69**, 555.
2. Bohm D., Gross E. «Phys. Rev.», 1949, **75**, 1851.
3. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М., 1975.
4. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1978, **19**, № 1, 65.
5. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1978, **19**, № 3, 95.
6. Кузьменков Л. С., Поляков П. А. «Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.», 1977, **18**, № 1, 94.
7. Крол Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М., 1975.
8. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от мнимого аргумента. М., 1954.

Кафедра теоретической физики

Поступила в редакцию 07.02.78

УДК 539.12;530.145

В. Ч. ЖУКОВСКИЙ, ШАРИФ АБДАЛЛА ХАМИД (Судан)

РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР МАССИВНЫМ ФОТОНОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Известно, что различные процессы, такие, как, например, образование позитрония [1], рождение лептонов и адронов при рассеянии лептонов на ядре [2], а также распад ρ^0-мезона [3] или аннигиляция чармония в электрон-позитронную пару [4], идут через образование промежуточного массивного фотона. С другой стороны, в литературе появились указания на возможность существования в сверхсильном магнитном поле $\mathcal{H} > B_0 = m^2/e_0 = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Гс * особого резонансного состояния с квантовыми числами фотона и с отличной от нуля массой [5]. Этот вывод был сделан на основе анализа поляризационного оператора электромагнитного поля при $\mathcal{H} > B_0$ [6].

В связи с этим представляет интерес рассмотреть процесс распада массивного фотона с образованием электронно-позитронной пары, а также обратный процесс — аннигиляцию пары с образованием массивного фотона, происходящие в интенсивном внешнем магнитном поле.

1. Рождение e^+e^--пары. Выберем наиболее простой векторный вариант взаимодействия поля электронов ψ с векторным полем B с лагранжианом

$$L_{\mathrm{int}} = e\psi^+\gamma^0\gamma_\mu\psi B^\mu, \tag{1}$$

где e — эффективная константа связи. В случае резонанса, предсказанного в работе [6], $e = e_0$ (e_0 — заряд электрона), а в случае ρ^0-мезона $e = e_0^2/2\gamma_\rho$ ($\gamma_\rho^2 \approx 0{,}5$ [7]).

Матричный элемент распада $B \to e^+e^-$ с учетом (1) может быть записан в виде

$$M_{fi} = \sqrt{4\pi}\, e\,(j^\mu e_\mu)/\sqrt{2q^0},$$

$$j^\mu = \int \psi^+\alpha^\mu e^{i\mathbf{qr}}\,\psi' d^3x, \quad [(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

* Принята система единиц $c = \hbar = 1$.