УДК 517.948.3

В. Б. ГОСТЕВ, А. Р. ФРЕНКИН

МЕТОД ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\,\psi(y)\,dy, \tag{1}$$

где $\psi(x)$ — искомая функция, а $\varphi(x)$ считается известной, встречаются в различных задачах математической и теоретической физики, например, в задаче о дифракции на полуплоскости [1], квантовомеханической задаче о преобразовании волновой функции из одного представления в другое [2]. В общем случае уравнение (1) не может быть обращено и решается приближенно [3]. Точные решения уравнения (1) получены только для вырожденных ядер $K(x, y) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,g_n(y)$ [4], ядер — функций Грина дифференциальных операторов [1], функций $K(x, y)$ служащих ядрами интегральных преобразований (Фурье, Ханкеля, Лапласа и т. п.) [4], ядер, зависящих от разности $K(x—y)$ [4]. Весьма изощренными приемами получены точные решения для специального вида ядер (уравнения Абеля, Шлемильха, с гипергеометрическим ядром и т. д.) [4, 5]. Пример ядер вида $K(x—y)$ на бесконечном интервале интегрирования ($a=-\infty$, $b=+\infty$) [1, 4] подсказывает, что уравнение (1) путем применения подходящих интегральных преобразований во многих случаях может быть сведено к алгебраическому уравнению. Дальнейшее изложение можно рассматривать как обобщение метода решения уравнений (1) с ядрами вида $K(x—y)$ путем фурье-преобразования ядра и функции $\varphi(x)$ на случай ядер и интегральных преобразований более общего вида.

Будем считать, что образ некоторого интегрального преобразования ядра $K(x, y)$ по x факторизуется, т. е. содержит в качестве сомножителя ядро обращения другого преобразования (по y). Конечно, при таком обобщении ядро $K(x, y)$ не будет функцией от $(x—y)$. Рассмотрим схему обращения уравнения (1) в этом случае. Пусть $s(\lambda, x)$, $t(\lambda, x)$ — ядра интегральных преобразований с известными ядрами обращений $s(\lambda, x)$, $\bar{t}(\lambda, y)$, такие, что для «произвольных» функций $\xi(x)$, $\eta(x)$ справедливы взаимно-обратные формулы:

$$\xi(x) = \int_p^q s(\lambda, x)\,\xi_s(\lambda)\,d\lambda, \tag{2}$$

$$\xi_s(\lambda) = \int_c^d \bar{s}(\lambda, x)\,\xi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\eta(x) = \int_k^l t(\lambda, x)\,\eta_t(\lambda)\,d\lambda, \tag{4}$$

$$\eta_t(\lambda) = \int_a^b \bar{t}(\lambda, x)\,\eta(x)\,dx.$$

Если s-образ ядра уравнения (1)

$$K_s(\lambda, y) = \int_c^d K(x, y)\bar{s}(\lambda, x)\,dx \tag{5}$$

с обращением

$$K(x, y) = \int_p^q s(\lambda, x) K_s(\lambda, y)\,d\lambda \tag{6}$$

имеет факторизуемую форму

$$K_s(\lambda, y) = \bar{t}(\lambda, y) f(\lambda), \tag{7}$$

то уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \int_a^b dy\,\psi(y) \int_p^q \bar{t}(\lambda, y) f(\lambda) s(\lambda, x)\,d\lambda. \tag{8}$$

После изменения порядка интегрирования правая часть уравнения (8) представляет собой s-разложение $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \int_p^q \varphi_s(\lambda) s(\lambda, x)\,d\lambda,$$

где

$$\varphi_s(\lambda) = f(\lambda)\psi_t(\lambda), \tag{9}$$

$$\psi_t(\lambda) = \int_a^b \psi(x)\bar{t}(\lambda, x)\,dx$$

и функция $t(\lambda, y)$ в разложении (7) естественно продолжается из интервала (p, q) в интервал (a, b), если такое продолжение необходимо. Связь s-образа $\varphi(x)$ и t-образа $\psi(x)$ дается простой формулой (9), осуществляющей алгебраизацию интегрального уравнения (1) при условии (7). Обращение (9) с помощью формул (3), (4) дает формальное решение уравнения (1) с ядром (6), (7) в виде двух квадратур:

$$\psi(x) = \int_k^l d\lambda\, t(\lambda, x) f^{-1}(\lambda) \int_c^d \bar{s}(\lambda, y)\varphi(y)\,dy. \tag{10}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу приведенного решения.

1. Верхние пределы интегрирования q, l для всех практически применяемых преобразований бесконечны ($q=l=\infty$), нижние — p, k могут быть конечными (синус-, косинус-преобразования Фурье, преобразования Лапласа, Меллина и др.) и бесконечными: $p=k=-\infty$ (экспоненциальное преобразование Фурье). Пределы интегрирования в обращениях c, d, a, b могут быть бесконечными (все верхние пределы) и даже лежать в комплексной плоскости (преобразования Меллина, Лапласа) [4, 6],

2. Вопросы о классе допустимых функций $\varphi(x)$, возможности перестановки пределов интегрирования, сходимости интегралов и т. п. должны рассматриваться при конкретном выборе преобразований $s(\lambda, x)$, $t(\lambda, x)$. Схема решения может быть распространена на обобщенные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $K(x, y)$ [7].

3. При известном решении уравнения (1) для ядра $K(x, y)$ с образом (7) можно найти решение того же уравнения с ядром

$$M(x, y) = \alpha(x)\beta(y)K(x,y). \tag{11}$$

Оно получается из решения (10) с помощью замен $\varphi(y) \to \varphi(y)\alpha^{-1}(y)$, $\psi(x) \to \psi(x)\beta(x)$ и имеет вид

$$\psi(x) = \beta^{-1}(x)\int_k^l f^{-1}(\lambda)\,t(\lambda, x)\,d\lambda\int_c^d \alpha^{-1}(y)\,\bar{s}(\lambda, y)\,\varphi(y)\,dy.$$

4. В случае, когда преобразования по x и y совпадают, т. е.

$$s(\lambda, x) = t(\lambda, y),$$

изложенный прием может быть использован при решении не только уравнения первого рода, но и неоднородных уравнений второго рода:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mu\int_a^b K(x, y)\,\psi(y)\,dy. \tag{12}$$

При этом для ядра $K(x, y)$ с s-образом

$$K_s(\lambda, y) = \bar{s}(\lambda, y)\,f(\lambda), \tag{13}$$

s-образ искомой функции находится алгебраически:

$$\psi_s(\lambda) = \frac{\varphi_s(\lambda)}{1 - \mu f(\lambda)}.$$

Примером таких уравнений могут служить уравнение с ядром $K(x-y)$ [1], уравнение с ядром, разлагающимся в произведение бесселевых функций [1] и уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mu\int_1^\infty \frac{\psi(y)}{x+y}\,dy,$$

решаемое с помощью преобразования Меллера — Фока [6].

5. В случае, когда верхний или нижний пределы интегрирования переменны,

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, y)\,\psi(y)\,dy, \tag{14}$$

уравнение Вольтерра (14) может быть сведено к уравнению Фредгольма (1) с $b = \infty$ заменой $K(x, y) \to \theta(x-y)K(x, y)$, где $\theta(x)$ — ступенчатая функция. Аналогично устраняется переменность нижнего предела. Развитый выше метод применим ко многим уравнениям вида (14). Пример будет приведен ниже.

6. Если функция $f(\lambda)$ такова, что в решении (10) возможно изменение порядка интегрирования, то уравнение (1) имеет резольвентное решение

$$\psi(x) = \int_c^d R(x, y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{15}$$

где обратное к $K(x, y)$ ядро

$$R(x, y) = \int_k^l d\lambda f^{-1}(\lambda) t(\lambda, x) \bar{s}(\lambda, y)$$

факторизовано в $\bar{t}(\lambda, x)$-разложении

$$R_{\bar{t}}(y, \lambda) = \bar{s}(\lambda, y) f^{-1}(\lambda).$$

Рассматриваемое как уравнение относительно $\varphi(x)$ при известной $\psi(x)$, соотношение (15) допускает обращение с помощью связи

$$\varphi_s(\lambda) = f(\lambda) \psi_{\bar{t}}(\lambda),$$

где

$$\psi_{\bar{t}}(\lambda) = \int_a^b \bar{t}(\lambda, x) \psi(x)\, dx. \tag{16}$$

В дальнейшем предполагается возможность разложения «произвольной» функции по полному набору $\bar{t}(\lambda, x)$

$$\psi(x) = \int_k^l \bar{t}(\lambda, x) \psi_{\bar{t}}(\lambda)\, d\lambda \tag{17}$$

с обращением (16) и заменой $t \to \bar{t}$. Такое разложение возможно для многих преобразований (Фурье, Конторовича — Лебедева, Меллера — Фока).

7. В случае, когда пределы интегрирования в формулах (2) и (4) совпадают ($p=k$, $q=l$), что выполняется для интегральных преобразований с $p=k=0$, $q=l=\infty$ (Фурье, Ханкеля, Конторовича — Лебедева, Меллина), и имеет место разложение (17), можно обратить порядок разложения ядра $K(x, y)$ и начать его с разложения по $\bar{t}(\lambda, y)$.

$$K(x, y) = \int_p^q K_{\bar{t}}(x, \lambda) \bar{t}(\lambda, y)\, d\lambda, \tag{18}$$

где

$$K_{\bar{t}}(\lambda, x) = \int_a^b t(\lambda, y) K(x, y)\, dy.$$

При факторизации $\bar{t}$-образа ядра

$$K_{\bar{t}}(\lambda, x) = f(\lambda) s(\lambda, x) \tag{19}$$

получаем снова связь образов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде (9). Часто удобнее начинать разложение ядра именно с формулы (18). Заметим также, что факторизация (19) образов ядра (7) возникает при наличии у двойного образа ядра $K_{s,\bar{t}}(\lambda_1, \lambda_2)$ δ-образной сингулярности (сравните аналогичный случай для $K_{s,s}(\lambda_1, \lambda_2)$-преобразования на примере преобразований Фурье и Ханкеля в [1]). Действительно, при условии $p=k$, $q=l$ к уравнению (11) приводит двойной s, t-образ ядра вида

$$K_{s,t}(\lambda_1, \lambda_2) = g(\lambda_1, \lambda_2) \delta(\lambda_1 - \lambda_2),$$

где

$$K_{s,t}(\lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_c^d dx \int\limits_a^b K(x, y)\,\bar{s}(\lambda_1, x)\,t(\lambda_2, y)\,dy$$

и

$$K(x, y) = \int\limits_k^l \int\limits_k^l d\lambda_1\, d\lambda_2\, K_{s,t}(\lambda_1, \lambda_2)\, s(\lambda_1, x)\,\bar{t}(\lambda_2, y).$$

Положив $g(\lambda, \lambda) = f(\lambda)$, получаем факторизованные образы ядра (7) или (19) после интегрирования по λ_1 или λ_2. Поэтому весь использованный при выводе решения (10) прием можно назвать методом двойных интегральных преобразований.

8. Вычисление интегралов в формуле (10) облегчается наличием подробных таблиц интегральных преобразований, в которых приведены интегралы, входящие в решение (10) для многих видов интегральных преобразований и функций $\varphi(x)$ [6—8].

Громоздким, но достаточно эффективным методом определения принадлежности ядер $K(x, y)$ к числу факторизуемых, т. е. имеющих s-образы (7) или структуру (11), является прямое разложение ядра $K(x, y)$ по различным ядрам интегральных преобразований (5) (при этом y рассматривается как параметр). Число используемых практически интегральных преобразований невелико (порядка десяти), таблицы образов достаточно подробны и дают возможность не только проверять факторизуемость ядер, но и построить несколько десятков существенно различных факторизуемых ядер. Примеры таких ядер дают, в частности, формулы 7.19, 7.20, 7.119, 8.26, 8.120, 9.143, 11.30, 11.138, 11.274, 11.300, 12.7, 12.14, 12.18 из книги [6]. Чтобы уяснить способ их применения, рассмотрим примеры.

1. Воспользуемся разложением Конторовича — Лебедева ядра [6, формула 11.174]:

$$K(x, y) = \left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-xy), \tag{20}$$

$$K(x, y) = \int\limits_0^\infty \lambda\, \mathrm{th}(\pi\lambda)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(y)\, K_{i\lambda}(x)\, d\lambda, \tag{21}$$

где $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя [9], вещественная при мнимом индексе и $x>0$; $P_\nu(x)$ — сферическая функция Лежандра первого рода, тоже вещественная при

$$\nu = -\frac{1}{2} + i\lambda;\ 0 \leqslant \lambda < \infty\ [9].$$

Разложение (21) показывает, что

$$K_{\text{КЛ}}(\lambda, y) = \lambda\, \mathrm{th}(\pi\lambda)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(y)$$

содержит в качестве множителя ядро обратного преобразования Меллера — Фока $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(y)$. Поэтому образ разложения Меллера — Фока [6] искомой функции $\psi(x)$

$$\psi_{\text{МФ}}(\lambda)=\int\limits_1^\infty dy\,\psi(y)\,P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(y)$$

связан с образом разложения Конторовича — Лебедева [6]

$$\varphi_{\text{КЛ}}(\lambda)=2\pi^{-2}\,\lambda\,\text{sh}\,\pi\lambda\int\limits_0^\infty dx\,\varphi(x)\,x^{-1}\,K_{i\lambda}(x), \tag{22}$$

$$\varphi(x)=\int\limits_0^\infty K_{i\lambda}(x)\,\varphi_{\text{КЛ}}(\lambda)\,d\lambda$$

левой части уравнения

$$\varphi(x)=\int\limits_1^\infty\left(\frac{1}{2}\,\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-xy}\,\psi(y)\,dy \tag{23}$$

простым соотношением

$$\psi_{\text{МФ}}(\lambda)=\varphi_{\text{КЛ}}(\lambda)\,\lambda^{-1}\,(\text{th}\,\pi\lambda)^{-1}. \tag{24}$$

Обращая МФ-образ (24) с помощью формулы [6]

$$\psi(x)=\int\limits_0^\infty d\lambda\lambda\,\text{th}\,\pi\lambda\psi_{\text{МФ}}(\lambda)\,P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)\,d\lambda,$$

находим решение уравнения (23) в виде

$$\psi(x)=2\pi^{-2}\int\limits_0^\infty d\lambda\lambda\,\text{sh}\,\lambda\,P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)\int\limits_0^\infty dy\cdot y^{-1}\,\varphi(y)\,K_{i\lambda}(y). \tag{25}$$

Неприменимость простого преобразования Лапласа (ядро $e^{-\lambda x}$) к функции (20) связана с тем, что нижний предел интегрирования в (23) не ноль, а единица.

2. Интегралы Вебера [10]

$$\int\limits_0^\infty J_0(x\lambda)\cos(\lambda y)\,d\lambda=(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\theta(x-y), \tag{26}$$

$$\int\limits_0^\infty J_0(x\lambda)\sin\lambda y\,d\lambda=(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\theta(y-x) \tag{27}$$

дают возможность с помощью разложения Ханкеля по $J_0(\lambda x)$

$$\varphi(x)=\int\limits_0^\infty d\lambda\lambda\,J_0(\lambda x)\,\varphi_{\text{Н0}}(\lambda)$$

и косинус- или синус-преобразования Фурье функции $\psi(y)$ решить уравнение Вольтерра

$$\varphi(x)=\int\limits_0^x K(x,y)\,\psi(y)\,dy,$$

или

$$\varphi(x)=\int_x^\infty K(x, y)\,\psi(y)\,dy$$

с ядрами (26), (27), умноженными на произвольные функции $\alpha(x)$, $\beta(y)$.

3. Неоднородное уравнение (12) ($a=0$, $b=\infty$) с ядром

$$K(x, y)=(2y)^{-1}\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{\gamma^2}\right)\right] \tag{28}$$

решается преобразованием Конторовича—Лебедева [6] с помощью интеграла [8, т. II]

$$\int_0^\infty \lambda \,\mathrm{sh}\,\pi\lambda\, K_{i\lambda}(y)\,K_{i\lambda}(\gamma)\,d\lambda=\frac{\pi^2}{4}\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{\gamma^2}\right)\right].$$

Связь КЛ-образов (22) функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ имеет вид

$$\psi_{КЛ}(\lambda)=\varphi_{КЛ}(\lambda)/(1-\mu K_{i\lambda}(\gamma)). \tag{29}$$

Обращение связи (29) дает решение неоднородного уравнения (12) с ядром (28). Анализ применимости формул (25), (29) здесь приводиться не будет.

Можно указать и более систематический прием распознавания ядер с факторизуемыми образами (13), (19) для преобразований $s(\lambda, x)$, $t(\lambda, x)$, являющихся собственными функциями линейных дифференциальных операторов второго порядка, действующих на переменную x:

$$L_{sx}s(\lambda, x)=\pm\lambda^2 s(\lambda, x), \tag{30}$$

$$L_{tx}t(\lambda x)=\pm\lambda^2 t(\lambda, x).$$

Записав факторизованное ядро (6) в виде

$$K(x, y)=\int_p^q s(\lambda, x)\,\overline{t}(\lambda, y)\,f(\lambda)\,d\lambda \tag{31}$$

и подействовав на него операторами (30), получаем соотношение

$$(L_{sx}\pm L_{\overline{t}y})\,K(x, y)=0, \tag{32}$$

эквивалентное условию факторизуемости ядра (31). В формуле (32) берется знак минус при одинаковых знаках в правых частях формул (30). В формуле (32) интегрирование по λ надо проводить после сложения (вычитания), предварительно перенеся действие операторов L_{sx}, $L_{\overline{t}y}$ под знак интеграла. Этим приемом обезвреживается возможная расходимость интегралов $\int_p^q \lambda^2 s(\lambda, x)\,\overline{t}(\lambda, y)\,f(\lambda)\,d\lambda$. Если операторы L_{sx} просты, то проверка факторизуемости ядра $K(x, y)$ с помощью условия (32) будет легче, чем разложение ядра по $s(\lambda, x)$. К сожалению, не для всех преобразований соответствующие операторы просты и, кроме того, условие (32) не выполняется для ядер вида (11).

Довольно просто выглядят дифференциальные операторы для многих случаев:

для ядер представлений Фурье ($\sin \lambda x$, $\cos \lambda x$, $e^{i\lambda x}$)

$$L_{Fx} = \frac{d^2}{dx^2}, \tag{33}$$

знак правой части (3) «—»;

для представления Лапласа ($e^{-\gamma x}$) — оператор (33), знак «+»;

представления Ханкеля ($J_\nu(\lambda x)$ без множителя $x^{\frac{1}{2}}$)

$$L_{H\nu x} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \tag{34}$$

знак «—»;

представления Мейера [6] ($K_\nu(\lambda x)$) — оператор (34), знак «+»;
представления Меллина ($x^{-\lambda}$)

$$L_{Mx} = x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}$$

знак «—».

Простой пример применения дифференциальных операторов дает уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \psi(y)(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy. \tag{35}$$

Естественно искать разложение ядра в интеграл Фурье и Ханкеля, т. е. применять операторы L_{Fy} и $L_{H\nu x}$ к ядру

$$K(x, y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Простой расчет показывает, что индекс ν оператора (34) — ноль и

$$(L_{H0x} - L_{Fy})\,K(x, y) = 0.$$

Отсюда и из полубесконечности интервала интегрирования (35) следует, что разложение можно вести по $J_0(\lambda x)$, $K_0(\lambda x)$ и $\sin \lambda y$, $\cos \lambda y$. Так как $K(x, y)$ конечно при $y=0$, $x>0$, то разложение идет по $\cos \lambda y$. Особенность ядра при $x=0$, $y=0$ делает предпочтительным разложение по $K_0(\lambda x)$. Восстанавливая факторизованное ядро

$$K(x, y) = 2\pi^{-1}\int_0^\infty \cos \lambda y\, K_0(\lambda x)\,d\lambda$$

с помощью обращения разложения Мейера [6], получаем [10]

$$\psi(x) = -2i\pi^{-2}\int_0^\infty d\lambda\lambda \cos \lambda x \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dz\,\varphi(z)\,z\,I_0(\lambda z), \tag{36}$$

где $\delta>0$ обеспечивает сходимость внутреннего интеграла в комплексной z-плоскости, $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя [9], внутренний интеграл берется первым. Анализ класса функций $\varphi(x)$, допускающих решение (36), не проводится.

Рассмотренный метод проверки факторизуемости ядер позволяет в случае ядер, зависящих от параметров, например,

$$K(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} (x^2 + y^2)^{-\mu},$$

находить значения параметров, при которых ядро факторизуется, и функции, по которым оно разлагается.

Таким образом, метод двойных интегральных преобразований, рассмотренный в статье, дает возможность находить формальные обращения уравнений Фредгольма первого рода для широкого класса ядер, не рассмотренных в литературе.

Авторы благодарны В. И. Григорьеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I. М., 1958.
2. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М., 1960.
3. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.
4. Интегральные уравнения. М., 1968.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. I. М., Физматгиз, 1963.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
7. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, тт. I, II. М., 1969, 1970.
9. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., 1953.
10. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. М.—Л., 1935.

Кафедра
квантовой теории

Поступила в редакцию
14.04.78