СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлова Н. А. Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды. Л., 1966.
2. Архангельский М. М. Вербицкий В. С., Клюсек З. Ш., Михайлова Н. А. В сб.: «Взаимодействие поверхностного и подземного стока», вып. 2. М., 1974.

Кафедра физики моря и вод суши

Поступила в редакцию 04.04.78

УДК 523.3:523.4

Ю. В. БАРКИН

НЕКОТОРЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЛУНЫ И МЕРКУРИЯ

§ 1. Уравнения движения. Порождающие периодические решения. Рассмотрим плоское поступательно-вращательное движение твердого тела M_2, обладающего плоскостью динамической симметрии, в поле притяжения шара M_1, однородного или обладающего концентрическим распределением плотностей. Предположим, что центр масс O_2 тела M_2 описывает плоскую орбиту относительно центра O_1 шара M_1.

Пусть O_1xy — система координат с началом в центре шара и с осями постоянной ориентации, расположенными в плоскости орбиты. Через $O_2\xi\eta\zeta$ обозначим оси собственной системы координат тела M_2, которые направлены по его главным центральным осям инерции. Предположим, что координатная плоскость $O_2\xi\zeta$ является плоскостью динамической симметрии тела M_2 и в течение всего времени движения совпадает с неизменяемой плоскостью орбиты. Обозначим через A, B и C главные центральные моменты инерции тела M_2, соответствующие его осям инерции $O_2\xi$, $O_2\eta$ и $O_2\zeta$, а через m_1 и m_2 — массы шара M_1 и тела M_2.

Примем за невозмущенное движение кеплеровское эллиптическое движение центра масс тела M_2 в осях O_1xy и равномерное вращение тела M_2 относительно оси инерции $O_2\eta$ ортогональной плоскости орбиты. При этом вращение шара происходит независимо от окружающих тел и мы исключаем его из дальнейшего рассмотрения.

При сделанных предположениях поступательно-вращательное движение тел M_1 и M_2 опишем каноническими оскулирующими элементами [1]

$$L, G, H, l, g, h, \tag{1}$$

где $L = m\sqrt{\mu a}$, l — средняя аномалия, $G = m\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, g — угловое расстояние до перицентра, H — величина вектора кинетического момента вращательного движения тела M_2, h — угол вращения тела M_2, измеряемый в плоскости орбиты от направления оси O_1x до оси $O_2\zeta$, a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты,

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \quad \mu = f(m_1+m_2)$$

— постоянные параметры, f — гравитационная постоянная,

$$l = n(t-t_0) + l_0, \ h = n_1(t-t_0) + h_0,$$

t — время, $n=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2}$ — среднее орбитальное движение, $n_1=H/B$ — величина угловой скорости вращения тела M_2; l_0 и h_0 — значения переменных l и h при $t=t_0$.

Сделаем предположение, что эллипсоид инерции тела M_2 близок к сфере и введем в рассмотрение малый параметр $\nu>0$ по формулам $\frac{B-A}{A}=\nu k_1$, $\frac{B-C}{A}=\nu k_2$, где k_1, k_2 — фиксированные постоянные. Тогда, сохраняя в разложении силовой функции задачи лишь первую и вторую гармоники, приближенные уравнения движения тел M_1 и M_2 запишем в виде [1]:

$$\frac{d(L,G,H)}{dt}=\frac{\partial F}{\partial(l,g,h)},\quad \frac{d(l,g,h)}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial(L,G,H)},\tag{2}$$

где

$$F=F_0+\nu F_1,$$

$$F_0=\frac{\mu^2m^3}{2L^2}-\frac{H^2}{2B},$$

$$F_1=\lambda\left\{(1+\delta)\sum_{s=0}^{\infty}X_s^{-3.0}(e)\cos sl+\right.$$

$$\left.+3(\delta-1)\sum_{s=1}^{\infty}X_s^{-3.2}(e)\cos[sl+2(g-h)]+X_{-s}^{-3.2}(e)\cos[sl-2(g-h)]\right\}.\tag{3}$$

В (3) введены новые обозначения:

$$\lambda=\frac{fm_1A}{2a^3}p,\quad p=\begin{cases}1, & B>A,\\ -1, & B<A,\end{cases}\quad a=\frac{L^2}{m^2\mu},$$

$$e=\frac{\sqrt{L^2-G^2}}{L},\quad \delta=\frac{B-C}{B-A}=\frac{k_2}{k_1},$$

$X_s^{-3.0}$, $X_{\pm s}^{-3.2}$ $(s=0,1,2,\ldots,\infty)$ — функции эксцентриситета, представляемые известными разложениями по целым степеням e [1].

Уравнения (2, 3) допускают интеграл энергии и интеграл площадей:

$$F_0(L,H)+\nu F_1(L,G,l\ \ g-h)=C_1,\tag{4}$$

$$G+H=C_2,\tag{5}$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\nu=0$ уравнения (2) легко интегрируются и допускают следующее семейство периодических решений периода T_0:

$$L=L_0,\ G=G_0,\ H=H_0,$$

$$l=n^{(0)}t+l_0,\ g=g_0,\ h=n_1^{(0)}t+h_0,\tag{6}$$

$$n^{(0)}=\frac{\mu^2m^3}{L_0^3},\quad n_1^{(0)}=\frac{H_0}{B},$$

$$\bar{k}n^{(0)}=\bar{k}_1n_1^{(0)},\quad T_0=\frac{2\pi\bar{k}}{n_1^{(0)}}=\frac{2\pi\bar{k}_1}{n^{(0)}},\tag{7}$$

где L_0, G_0, l_0, g_0, h_0 — произвольные постоянные интегрирования, а величина H_0 вычисляется из условия соизмеримости (7).

Решение (6, 7) соответствует невозмущенному движению тел, в котором за $\bar{k}_1$ оборотов по эллиптической орбите тело M_2 совершает $\bar{k}$ оборотов с постоянной угловой скоростью относительно собственного центра масс.

В работе [1] показано, что уравнения (2, 3) допускают периодические решения периода T_0 при малых значениях ν, которые обращаются в решение (6, 7) при $\nu=0$, если только соответствующие порождающие значения переменных определяются формулами:

$$l_0=0,\ g_0=0,\ h_0=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi, \tag{8}$$

$$\delta=\frac{B-C}{B-A}=\frac{\left(3\varepsilon\dfrac{\partial X_N^{-3.2}}{\partial e_0}-\dfrac{\partial X_0^{-3.0}}{\partial e_0}\right)}{\left(\dfrac{\partial X_0^{-3.0}}{\partial e_0}+3\varepsilon\dfrac{\partial X_N^{-3.2}}{\partial e_0}\right)},\ \varepsilon=\cos 2h_0=\pm 1, \tag{9}$$

$$e_0=\frac{\sqrt{L_0^2-G_0^2}}{L_0},\quad NB\mu^2m^3=2H_0L_0^3, \tag{10}$$

N — целое число.

Решение (8) означает, что в момент прохождения перицентра телом M_2 его ось инерции $O_2\zeta$ либо совпадает с линией апсид ($h_0=0,\ \pi$), либо ей ортогональна $\left(h_0=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$. Уравнение (9) определяет порождающее значение эксцентриситета e_0 в зависимости от динамического параметра δ.

Решения (8—10) будут порождать периодические решения уравнений (2, 3) при всех значениях переменной e_0 и величины параметра δ, за исключением конечного набора их значений, определяемых равенствами:

$$\delta=1\ (A=C),\ e_0=1,$$

$$X_N^{-3.2}(e_0)=0,\ \varphi_N(e_0)=\frac{\partial^2X_N^{-3.2}}{\partial e_0^2}\cdot\frac{\partial X_0^{-3.0}}{\partial e_0}-\frac{\partial X_N^{-3.2}}{\partial e_0}\cdot\frac{\partial^2X_0^{-3.0}}{\partial e_0^2}=0.$$

Графики функций $X_N^{-3.2}$ для $N=1,\ 2,\ \ldots,\ 8$ приводятся в работе [2]. Уравнение $\varphi_N(e_0)=0$ для малых значений эксцентриситетов проверяется непосредственно. Так, в случае соизмеримости $N=2$ имеем

$$\varphi_2(e_0)=(189/2)\,(e_0^3+O\,(e_0^5)).$$

Таким образом, порождающие периодические решения найдены, и дальнейшая задача заключается в построении соответствующих периодических решений уравнений (2, 3) и исследовании их устойчивости.

§ 2. Характеристические показатели и необходимые условия устойчивости. Для изучения устойчивости найденных периодических решений по первому приближению воспользуемся методом вычисления характеристических показателей [3], который позволяет получить необходимые условия устойчивости периодических решений, не прибегая к фактическому построению рядов, их представляющих.

Следуя этому методу, можно показать, что изучаемым периодическим решениям соответствуют шесть характеристических показателей, представленных рядами по степеням величины $\sqrt{\nu}$.

При этом различаются два типа характеристических показателей:

$$\alpha^{(1,2,3,4)} = \alpha_1^{(1,2,3,4)} \sqrt{\nu} + \alpha_3^{(1,2,3,4)} \nu \sqrt{\nu} + \ldots, \tag{11}$$
$$\alpha^{(5,6)} = \alpha_2^{(5,6)} \nu + \alpha_4^{(5,6)} \nu^2 + \ldots,$$

причем коэффициенты $\alpha_1^{(1,2,3,4)}$ и $\alpha_2^{(5,6)}$ определяются в результате решения алгебраических уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0^2} + \alpha_1^2 & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0 \partial h_0} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial H_0^2} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial l_0} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial H_0^2} + \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0 \partial h_0} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0 \partial g_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial l_0} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0 \partial g_0} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial G_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial G_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial G_0^2} + \alpha_2^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

где $[F_1]$ определяется формулой [1]:

$$[F_1] = \lambda \{(1 + \delta) X_0^{-3.0}(e_0) + 3(\delta - 1) X_N^{-3.2}(e_0) \cos [N l_0 + 2(g_0 - h_0)]\},$$

λ, δ, e_0 имеют порождающие значения.

Коэффициенты $\alpha_s^{(1,2,3,4)}$, $\alpha_s^{(5,6)}$ высших приближений в рядах (11) вычисляются по известным рекуррентным соотношениям вида:

$$\alpha_s^{(1,2,3,4)} = A_s^{(1,2,3,4)} \alpha_1^{(1,2,3,4)}, \quad \alpha_s^{(5,6)} = B_s^{(5,6)} \alpha_2^{(5,6)}, \tag{14}$$

где $A_s^{(1,2,3,4)}$ и $B_s^{(5,6)}$ — вещественные постоянные.

Вычисляя вторые производные функции $[F_1]$ и решая уравнения (12) и (13), находим

$$\alpha_1^{(1,2)} = \pm \sqrt{-\frac{6n_1^{(0)}}{H_0} \lambda (\delta - 1) X_N^{-3.2} \varepsilon \left(1 - \frac{3}{2} N^2 \frac{B}{ma^2}\right)}, \tag{15}$$

$$\alpha_1^{(3,4)} = 0, \quad \alpha_2^{(5,6)} = 0. \tag{16}$$

Из формул (14), (16) сразу следует, что $\alpha^{(3,4)} = \alpha^{(5,6)} = 0$, т. е. четыре из шести характеристических показателей равны нулю. Это обусловлено наличием первых интегралов (4), (5) [3].

В соответствии с (14), (15) коэффициенты $\alpha_1^{(1,2)}$, а вместе с ними и характеристические показатели $\alpha^{(1,2)}$ будут чисто мнимыми, если будет выполнено условие

$$p(\delta-1)X_N^{-3.2}\varepsilon\left(1-\frac{3}{2}N^2\frac{B}{ma^2}\right)>0. \qquad (17)$$

Последнее условие представляет собой необходимое условие устойчивости периодических решений [4]. Тем порождающим периодическим решениям, которые нарушают условие (17), соответствуют неустойчивые, по Ляпунову, периодические решения (в строгом смысле этого слова).

Для тел солнечной системы (Луна, Меркурий, Фобос и т. д.) выполняется неравенство $B\ll ma^2$, поэтому (17) можно упростить. Учитывая, что $p(\delta-1)=\dfrac{A-C}{|A-B|}$, будем иметь

$$(A-C)X_N^{-3.2}(e_0)\cos 2h_0>0. \qquad (17')$$

Неравенство (17′) выполняется в следующих четырех случаях:

1. $A>C,\ e_0<e_N,\ h_0=0,\ \pi;$
2. $A<C,\ e_0>e_N,\ h_0=0,\ \pi;$
3. $A<C,\ e_0<e_N,\ h_0=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi;$
4. $A>C,\ e_0>e_N,\ h_0=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi;$

где e_N — решение уравнения $X_N^{-3.2}(e)=0$ ($e_2\simeq 0{,}64$; $e_3\simeq 0{,}8$), $N\geqslant 2$.

Условия 1—4 означают, что в момент прохождения центра масс тела M_2 перицентра орбиты по линии апсид направлена ось тела, соответствующая меньшему моменту инерции, если $e_0<e_N$, и эта ось перпендикулярна линии апсид, если $e_0>e_N$ ($N\geqslant 2$).

Сопоставляя реальному движению Луны и Меркурия устойчивые (по первому приближению) периодические решения Пуанкаре данной модели, для порождающих значений параметра $\delta=(B-C)/(B-A)$ на основании работы [1] получим для Меркурия и Луны значения $\delta_M=1{,}18$, $\delta_Л=1{,}5$. Последнее значение согласуется с наблюдаемым [5].

В заключение параграфа отметим, что условия устойчивости *1—4* согласуются с аналогичными условиями задачи о плоских резонансных вращательных движениях твердого тела, движущегося по эллиптической орбите, полученными Ф. Л. Черноусько [6].

§ 3. Построение периодических решений. Будем строить периодические решения уравнений (2, 3) в виде рядов, расположенных по целым степеням ν:

$$\begin{aligned} L&=L_0+\nu L_1+\ldots, & l&=n^{(0)}t+l_0+\nu l_1+\ldots,\\ G&=G_0+\nu G_1+\ldots, & g&=g_0+\nu g_1+\ldots, \\ H&=H_0+\nu H_1+\ldots, & h&=n_1^{(0)}t+h_0+\nu h_1+\ldots, \end{aligned} \qquad (18)$$

где L_0, G_0, ..., h_0 соответствуют порождающему периодическому решению, а L_s, G_s, ..., h_s ($s=0, 1, ..., \infty$) — периодические функции периода T_0.

В настоящей работе мы построим первое приближение L_1, G_1, ..., ..., h_1 периодических решений, соответствующим соизмеримостям лунного типа $(n^{(0)} : n_1^{(0)} = 1:1)$ и типа Меркурия $(n^{(0)} : n_1^{(0)} = 2:3)$.

Для этого представим функцию $F_1(L_0, G_0, l_0 + n^{(0)}t, g_0, h_0 + n_1^{(0)}t)$ и величины L_1, G_1, ..., h_1 в виде суммы двух частей:

$$F_1 = [F_1](L_0, G_0, l_0, g_0, h_0) + \Phi_1(L_0, G_0, l_0 + n^{(0)}t, g_0, h_0 + n_1^{(0)}t),$$

$$L_1 = L_0^{(1)} + L^{(1)},\ G_1 = G_0^{(1)} + G^{(1)},\ H_1 = H_0^{(1)} + H^{(1)},$$

$$l_1 = l_0^{(1)} + l^{(1)},\ g_1 = g_0^{(1)} + g^{(1)},\ h_1 = h_0^{(1)} + h^{(1)},$$

где $[F_1]$ и $L_0^{(1)}, G_0^{(1)}, \ldots, h_0^{(1)}$ — постоянные составляющие функции F_1 и соответствующих величин L_1, G_1, ..., h_1.

Согласно общей теории [3] периодические составляющие возмущений первого порядка определяются простыми квадратурами

$$L^{(1)} = \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_0} dt,\ G^{(1)} = \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial g_0} dt,\ H^{(1)} = \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial h_0} dt,$$

$$l^{(1)} = -\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial L_0} dt - \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} \int L^{(1)} dt,\ g^{(1)} = -\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial G_0} dt,$$

$$h^{(1)} = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial H_0^2} \int H^{(1)} dt, \tag{19}$$

а величины $L_0^{(1)}, G_0^{(1)}, \ldots, h_0^{(1)}$ находятся в результате решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial [F_1]}{\partial L_0} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} L_0^{(1)} = 0,\\
\frac{\partial [F_1]}{\partial H_0} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial H_0^2} H_0^{(1)} = 0,\\
\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0^2} l_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial l_0} g_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial l_0} h_0^{(1)} = 0,\\
\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0 \partial g_0} l_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} g_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} h_0^{(1)} = 0,\\
\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial l_0 \partial h_0} l_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial h_0} g_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} h_0^{(1)} = 0,
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0 \partial G_0} L_0^{(1)} + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial G_0^2} G_0^{(1)} = \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial l_0 \partial G_0} l_1^{(1)}\right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial g_0 \partial G_0} g_1^{(1)}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial h_0 \partial G_0} h_1^{(1)}\right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial L_0 \partial G_0} L_1^{(1)}\right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial G_0^2} G_1^{(1)}\right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial H_0 \partial G_0} H_1^{(1)}\right],$$

где $[f]$ означает осреднение функции f по времени от 0 до T_0.

Последние уравнения записаны с учетом структур возмущений $L_1^{(1)}, G_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(1)}$ и вторых производных функции Φ_1. Из уравнений (20) сразу получаем

$$L_0^{(1)} = -\frac{\partial [F_1]}{\partial L_0}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2}\right)^{-1}, \ H_0^{(1)} = 0, \ l_0^{(1)} = g_0^{(1)} = h_0^{(1)} = 0,$$

а величина $G_0^{(1)}$ находится, лишь после того как определены периодические функции $L_1^{(1)}, G_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(1)}$.

Для удобства интерпретации периодических решений в уравнениях (2, 3) и в квадратурах (19) удобнее перейти к новым переменным a, e согласно формулам преобразования $L = m\sqrt{\mu a}$, $G = m\sqrt{\mu a(1-e^2)}$. В результате будем иметь:

$$\begin{gathered}
a^{(1)} = \frac{2}{m}\sqrt{\frac{a_0}{\mu}}\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_0}\,dt, \\
e^{(1)} = -\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0 m\sqrt{\mu a_0}}\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial g_0}\,dt + \frac{1-e_0^2}{e_0 m\sqrt{\mu a_0}}\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_0}\,dt, \\
H^{(1)} = \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial h_0}\,dt, \ h^{(1)} = \frac{1}{B}\int H^{(1)} dt, \\
l^{(1)} = -\frac{2}{m}\sqrt{\frac{a_0}{\mu}}\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_0}\,dt - \frac{(1-e_0^2)}{e_0 m\sqrt{\mu a_0}}\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial e_0}\,dt - \frac{3n^{(0)}}{a_0}\int a^{(1)}\,dt, \\
g^{(1)} = +\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0 m\sqrt{\mu a_0}}\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial e_0}\,dt,
\end{gathered} \tag{21}$$

где введены новые обозначения:

$$a = a_0 + \nu(a_0^{(1)} + a^{(1)}) + \ldots, \ e = e_0 + \nu(e_0^{(1)} + e^{(1)}) + \ldots;$$

a_0, e_0 — порождающие значения большой полуоси и эксцентриситета орбиты, $a_0^{(1)}, e_0^{(1)}$ — постоянные составляющие и $a^{(1)}$, $e^{(1)}$ — периодические составляющие в возмущениях первого порядка a и e. Отметим, что величины $L_0^{(1)}, G_0^{(1)}$ позволяют определить величины $e_0^{(1)}$ и $a_0^{(1)}$.

Выберем порождающее периодическое решение, удовлетворяющее необходимым условиям устойчивости *1—4*, для случая соизмеримости $N=3$:

$$\begin{gathered}
l_0 = g_0 = h_0 = 0, \quad \delta(e_0) = (B-C)/(B-A) > 1, \\
3\mu^2 m^3 B = 2H_0 L_0^3, \quad T_0 = 4\pi/n^{(0)} = 6\pi/n_1^{(0)}
\end{gathered}$$

и получим формулы для вычисления возмущений первого порядка. Для этого, ограничиваясь в разложении F_1 слагаемыми порядка e_0^3, вычисляем:

$$\begin{gathered}
[F_1] = \lambda\{(1+\delta) X_0^{-3.0} + 3(\delta - 1) X_3^{-3.2}\cos[Nl_0 + 2(g_0 - h_0)]\}, \\
\Phi_1 = \lambda\{(1+\delta)[X_1^{-3.0}\cos l + X_2^{-3.0}\cos 2l + X_3^{-3.0}\cos 3l] +
\end{gathered}$$

$$+3(\delta-1)\left[X_1^{-3.2}\cos(l+2g_0-2h)+X_2^{-3.2}\cos 2(l+g_0-h)+\right.$$
$$\left.+X_4^{-3.2}\cos(4l+2g_0-2h)+X_5^{-3.2}\cos(5l+2g_0-2h)\right]\},$$

где $l=n^{(0)}t+l_0$, $h=n_1^{(0)}t+h_0$.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные формулы для изучаемого периодического решения:

$$\begin{gathered}
a=a_0+\nu\{a_0^{(1)}+a_1^{(1)}\cos\tau+a_2^{(1)}\cos 2\tau+a_3^{(1)}\cos 3\tau+\ldots\}+\ldots,\\
e=e_0+\nu\{e_0^{(1)}+e_1^{(1)}\cos\tau+e_2^{(1)}\cos 2\tau+e_3^{(1)}\cos 3\tau+\ldots\}+\ldots,\\
H=H_0+\nu\{H_1^{(1)}\cos\tau+H_2^{(1)}\cos 2\tau+H_3^{(1)}\cos 3\tau+\ldots\}+\ldots,\\
l=n^{(0)}t+\nu\{l_1^{(1)}\sin\tau+l_2^{(1)}\sin 2\tau+l_3^{(1)}\sin 3\tau+\ldots\}+\ldots,\\
g=\nu\{g_1^{(1)}\sin\tau+g_2^{(1)}\sin 2\tau+g_3^{(1)}\sin 3\tau+\ldots\}+\ldots,\\
h=n_1^{(0)}t+\nu\{h_1^{(1)}\sin\tau+h_2^{(1)}\sin 2\tau+h_3^{(1)}\sin 3\tau+\ldots\}+\ldots,
\end{gathered}\tag{22}$$

где $\tau=n^{(0)}t$, а коэффициенты $a_i^{(1)}, e_i^{(1)}, \ldots, h_i^{(1)}$ $(i=1, 2, 3)$ определяются последовательностью формул

$$\begin{gathered}
\nu a_i^{(1)}=\nu' a_0\frac{A_i}{i},\quad \nu l_i^{(1)}=\frac{\nu'}{i}\left[-3(A_i-D_i)-\frac{1}{2}\frac{(1-e_0^2)}{e_0}E_i\right],\\
\nu e_i^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{\nu'}{i}\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0}\left[B_i+\sqrt{1-e_0^2}A_i\right],\\
\nu g_i^{(1)}=+\frac{1}{2}\frac{\nu'}{i}\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0}E_i,\\
\frac{\nu H_i^{(1)}}{B}=\frac{1}{2}\frac{\nu''}{i}B_i n^{(0)},\quad \nu h_i^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{\nu''}{i}B_i,
\end{gathered}\tag{23}$$

где

$$\begin{gathered}
A_1=(1+\delta)X_1^{-3.0}+6(\delta-1)(2X_4^{-3.2}-X_2^{-3.2}),\\
B_1=6(\delta-1)(X_2^{-3.2}-X_4^{-3.2}),\\
A_2=2(1+\delta)X_2^{-3.0}+3(\delta-1)(5X_5^{-3.2}-X_1^{-3.2}),\\
B_2=6(\delta-1)(X_1^{-3.2}-X_5^{-3.2}),\\
A_3=3(1+\delta)X_3^{-3.0},\ B_3=0,\ D_1=(1+\delta)X_1^{-3.0}+3(\delta-1)(X_2^{-3.2}+X_4^{-3.2}),\\
D_2=(1+\delta)X_2^{-3.0}+3(\delta-1)(X_1^{-3.2}+X_5^{-3.2}),\ D_3=(1+\delta)X_3^{-3.0},\\
E_1=(1+\delta)\frac{\partial X_1^{-3.0}}{\partial e_0}+3(\delta-1)\left(\frac{\partial X_2^{-3.2}}{\partial e_0}+\frac{\partial X_4^{-3.2}}{\partial e_0}\right),\\
E_3=(1+\delta)\frac{\partial X_3^{-3.0}}{\partial e_0},
\end{gathered}\tag{24}$$

$$E_2 = (1+\delta)\frac{\partial X_2^{-3.0}}{\partial e_0} + 3(\delta - 1)\left(\frac{\partial X_2^{-3.2}}{\partial e_0} + \frac{\partial X_5^{-3.2}}{\partial e_0}\right),$$

$$\nu' = \frac{B}{m_2 a^2}\nu, \quad \nu'' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\nu, \quad \nu = \frac{|B - A|}{A}.$$

Периодическому решению лунного типа также сопоставим порождающее решение, удовлетворяющее необходимым условиям устойчивости:

$$l_0 = g_0 = h_0 = 0, \quad \delta(e_0) = \frac{B - C}{B - A} > 1,$$

$$\mu^2 m^3 B = H_0 L_0^3, \quad T_0 = \frac{2\pi}{n^{(0)}} = \frac{2\pi}{n_1^{(0)}}.$$

В этом случае периодическое решение определится формулами (22) и (23), в которых достаточно положить

$$A_1 = (1+\delta) X_1^{-3.0} + 3(\delta - 1)(3X_3^{-3.2} - X_1^{-3.2}),$$

$$B_1 = 6(1-\delta)(X_3^{-3.2} - X_1^{-3.2}),$$

$$A_2 = 2(1+\delta) X_2^{-3.0} + 12(\delta - 1) X_4^{-3.2}, \quad B_2 = 6(1-\delta) X_4^{-3.2},$$

$$A_3 = 3(1+\delta) X_3^{-3.0} + 15(\delta - 1) X_5^{-3.2}, \quad B_3 = 6(1-\delta) X_5^{-3.2},$$

$$D_1 = (1+\delta) X_1^{-3.0} + 3(\delta - 1)(X_1^{-3.2} + X_3^{-3.2}),$$

$$D_2 = (1+\delta) X_2^{-3.0} + 3(\delta - 1) X_4^{-3.2},$$

$$D_3 = (1+\delta) X_3^{-3.0} + 3(\delta - 1) X_5^{-3.2}, \tag{25}$$

$$E_1 = (1+\delta)\frac{\partial X_1^{-3.0}}{\partial e_0} + 3(\delta - 1)\left(\frac{\partial X_1^{-3.2}}{\partial e_0} + \frac{\partial X_3^{-3.2}}{\partial e_0}\right),$$

$$E_2 = (1+\delta)\frac{\partial X_2^{-3.0}}{\partial e_0} + 3(\delta - 1)\frac{\partial X_4^{-3.2}}{\partial e_0},$$

$$E_3 = (1+\delta)\frac{\partial X_3^{-3.0}}{\partial e_0} + 3(\delta - 1)\frac{\partial X_5^{-3.2}}{\partial e_0},$$

где в функциях $X_s^{-3.0}$, $X_s^{-3.2}$ и их первых производных по e_0 сохраняются члены порядка e_0^3.

§ 4. Оценки периодических возмущений в поступательно-вращательном движении Луны и Меркурия. Используем полученные результаты для оценки ньютоновских периодических эффектов в движении Луны и Меркурия. При этом реальному движению этих небесных тел сопоставим периодические решения данной задачи, определяемые следующими порождающими значениями переменных и параметров задачи [7], [8] (таблица).

В случае соизмеримости $n^{(0)} : n_1^{(0)} = 1 : 1$ для принятых значений параметров, характеризующих движение Луны, по формулам (22), (23) и (24) вычисляем периодические составляющие возмущений первого порядка (возмущения большой полуоси даны в метрах):

$$
\begin{aligned}
\nu a_1 &= 1{,}669 \cos\tau + 0{,}141 \cos 2\tau + 0{,}001 \cos 3\tau,\\
\nu e_1 &= 1{,}97\cdot 10^{-8} \cos\tau + 0{,}217\cdot 10^{-8} \cos 2\tau + 0{,}021\cdot 10^{-8}\cos 3\tau, \qquad (26)\\
\nu\left(\frac{H_1}{B}\right) &= -n_1^{(0)}\{0{,}1308\cdot 10^{-3}\cos\tau + 0{,}0077\cdot 10^{-3}\cos 2\tau +\\
&\quad + 0{,}0006\cdot 10^{-3}\cos 3\tau\},\\
\nu l_1 &= -15{,}32''\cdot 10^{-2}\sin\tau - 1{,}6''\cdot 10^{-2}\sin 2\tau - 0{,}16''\cdot 10^{-2}\sin 3\tau,\\
\nu g_1 &= +7{,}607''\cdot 10^{-2}\sin\tau + 0{,}812''\cdot 10^{-2}\sin 2\tau + 0{,}080''\cdot 10^{-2}\sin 3\tau,\\
\nu h_1 &= -26{,}975''\sin\tau - 1{,}586''\sin 2\tau - 0{,}120''\sin 3\tau, \quad \tau = n^{(0)}t.
\end{aligned}
$$

Дина ические параметры, характеризующие поступательно-вращательное движение Луны и Меркурия

Параметры движения	Луна	Меркурий
m_2	$0{,}0123001\cdot m_{\oplus}$	$1{,}63398\cdot 10^{-7}\cdot m_{\odot}$
a_0	$384{,}400\cdot 10^{6}$м	$578{,}867\cdot 10^{8}$м
e_0	0,055	0,206
δ	1,5	1,18
ν	$4{,}0357\cdot 10^{-4}$	$1{,}695\cdot 10^{-4}$
ν'	$0{,}330\cdot 10^{-8}$	$0{,}124\cdot 10^{-12}$
ν''	$0{,}399\cdot 10^{-3}$	$1{,}695\cdot 10^{-4}$

Аналогичные формулы для параметров Меркурия, принятых в таблице, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\nu a_1 &= 0{,}0085\cos\tau + 0{,}0044\cos 2\tau + 0{,}0010\cos 3\tau,\\
\nu e_1 &= 0{,}51\cdot 10^{-12}\cos\tau + 0{,}14\cdot 10^{-12}\cos 2\tau + 0{,}034\cdot 10^{-12}\cos 3\tau,\\
\nu\left(\frac{H_1}{B}\right) &= n_1^{(0)}\{0{,}489\cdot 10^{-4}\cos\tau - 0{,}119\cdot 10^{-4}\cos 2\tau\},\\
\nu l_1 &= 0{,}4240''\cdot 10^{-6}\sin\tau + 0{,}1264''\cdot 10^{-6}\sin 2\tau + 0{,}0416''\cdot 10^{-6}\sin 3\tau,\\
\nu g_1 &= +0{,}499''\cdot 10^{-6}\sin\tau + 0{,}156''\cdot 10^{-6}\sin 2\tau + 0{,}037''\cdot 10^{-6}\sin 3\tau,\\
\nu h_1 &= 10{,}098''\cdot\sin\tau - 2{,}414''\cdot\sin 2\tau, \quad \tau = n^{(0)}t.
\end{aligned}
$$

Формулы (26) и (27) позволяют сделать ряд выводов о характере возмущений в движении Луны и Меркурия: 1) периодические возмущения большой полуоси лунной орбиты составляют 1,669 м и по амплитуде сравнимы с периодическими релятивистскими эффектами в движении Луны [9], поэтому для выявления последних необходимо строго учитывать взаимосвязь поступательных и вращательных движений Луны и Земли; 2) наибольшая периодическая либрация периода T_0 в плоскости орбиты для Луны составляет 26,175″, что согласуется с данными наблюдений [5], а аналогичная либрация Меркурия составляет 10,098″; 3) орбитальные возмущения Меркурия, обусловленные его несферичностью, незначительны по своей величине.

Отметим, что вековые и долгопериодические возмущения в поступательно-вращательном движении Луны и Меркурия могут иметь большую величину по сравнению с амплитудами периодических возмущений. Анализ упомянутых эффектов может быть проведен на основе метода усреднения по схеме Делоне — Хилла, предложенного в работе [10] для рассматриваемой модели системы тел M_1 и M_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баркин Ю. В. «Астрон. журнал», 1976, **53**, 1110.
2. Lutz F. H., Abbit M. W. «Celest. Mech.», 1969, **1**, 31.
3. Баркин Ю. В. «Письма в Астрон. журнал», 1979, **5**, 100.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964.
5. Куликов К. А., Гуревич В. Б. Основы лунной астрометрии. М., 1972.
6. Черноусько Ф. Л. «Журнал выч. матем. и мат. физики», 1963, **3**, 528.
7. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под редакцией Г. Н. Дубошина. М., 1976.
8. Esposito P. B., Anderson J. D. Space Res. Vol. 17, Oxford e.a. 1977, 639.
9. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., 1972.
10. Баркин Ю. В. «Астрон. журнал», 1975, **52**, 1076.

ГАИШ

Поступила в редакцию
23.05.78