КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 531.19

В. А. КРАСНИКОВ

К УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Для ряда задач неравновесной статистической механики полезно иметь уравнения движения для плотностей различных динамических величин. В частности, для построения гидродинамических уравнений необходимо знать динамические уравнения для квазилокальных плотностей интегралов движения — плотности энергии $\varepsilon(q;\ x)$, плотности импульса $\pi(q;\ x)$ и плотности массы $\rho(q;\ x)$, которые для классической системы из N частиц, взаимодействующих с парным потенциалом $\Phi(|q_i-q_j|)$, имеют явный вид:

$$\varepsilon(q;\ x)\equiv\gamma_0(q)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}\delta(q_i-q)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i<j}\Phi(|q_i-q_j|)\ (\delta(q_i-q)-\delta(q_j-q)),$$
$$\pi_l(q;\ x)\equiv\gamma_l(q)=\sum_{i=1}^{N}p_i^l\delta(q_i-q),\quad l=1,\ 2,\ 3; \tag{1}$$
$$\rho(q;\ x)\equiv\gamma_4(q)=m\sum_{i=1}^{N}\delta(q_i-q),$$

где $x=(p_i,\ q_i)$ — совокупность импульсов и координат частиц системы с массой m.

В работе [1] в квантовомеханическом случае была получена компактная форма уравнений движения для квазилокальных операторов γ_m ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Обобщение этих результатов на случай присутствия внешних полей дано в [2, 3]. В данной работе эта задача рассматривается в рамках чисто классического подхода.

Рассмотрим классическую нерелятивистскую статистическую систему, гамильтониан которой имеет вид

$$\mathscr{H}(t)=\int d^3q h(q,\ t;\ x),$$
$$h(q,\ t;\ x)=\alpha_n\gamma_n(q;\ x),\quad \alpha_n=\alpha_n(q,\ t),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

Здесь и везде в дальнейшем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. В гамильтониан (2) введены заданные внешние поля $\alpha_n(q,\ t)$. Свободному от внешних полей случаю соответствует в (2)

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_n=0\ \text{для}\ n\neq0.$$

Плотностям динамических переменных $\gamma_m(q;\ x)$ соответствуют аддитивные (в смысле представления в форме пространственного интеграла от квазилокальных величин) динамические переменные Γ_m:

$$\Gamma_m = \int d^3q\, \gamma_m(q;\, x). \tag{3}$$

Будем предполагать, что их скобки Пуассона равны нулю:

$$\{\Gamma_n,\, \Gamma_m\} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, мы ограничиваемся случаем, когда рассматриваемые плотности $\gamma_m(q;\ x)$ соответствуют интегралам движения Γ_m по отношению к свободному гамильтониану Γ_0.

Из (3) и (4) следует

$$\{\Gamma_n,\, \gamma_m(q;\, x)\} = \frac{\partial}{\partial q_k}\, \gamma_{mnk}(q;\, x), \quad k = 1,\, 2,\, 3, \tag{5}$$

где введены плотности «потоков» $\gamma_{mnk}(q;\ x)$, соответствующих плотностям динамических величин $\gamma_m(q;x)$.

Для дальнейшего существенную роль играет справедливое для любых квазилокальных динамических переменных γ_m, γ_n тождество

$$\{\Gamma_n,\, \gamma_m(q)\} + \{\Gamma_m,\, \gamma_n(q)\} = \frac{\partial}{\partial q_k} \int d^3 q'\, q_k' \times$$

$$\times \int_0^1 dg\, \{\gamma_n(q + gq'),\ \gamma_m(q - (1 - g)\, q')\}. \tag{6}$$

Для квантовомеханического случая оно было доказано в [1] (см. также [4]). Это доказательство полностью сохраняется и при классическом рассмотрении и поэтому здесь не воспроизводится. Из (5) и (6) для плотностей «потоков» следует

$$\gamma_{mnk}(q) + \gamma_{nmk}(q) = \int d^3 q' q_k' \int_0^1 dg\, \{\gamma_n(q + gq'),\ \gamma_m(q - (1 - g)\, q')\}, \tag{7}$$

о ткуда

$$\gamma_{nnk}(q) = \frac{1}{2} \int d^3 q' q_k' \int_0^1 dg\, \{\gamma_n(q + gq'),\ \gamma_n(q - (1 - g)\, q')\}. \tag{8}$$

Заметим, что если $\Gamma_m = \mathrm{const}$, то

$$\gamma_{mnk}(q) = \int d^3 q'\, q_k' \int_0^1 dg\, \{\gamma_n(q + gq'),\ \gamma_m(q - (1 - g)\, q')\}. \tag{9}$$

Если $\Gamma_l = p_l$ $(l = 1,\ 2,\ 3)$, где p_l — компоненты полного импульса системы при выключенных полях, то

$$\gamma_{lnk}(q) = -\gamma_n\ \ q)\, \delta_{lk} +$$

$$+ \int d^3q' q_k' \int_0^1 dg\, \{\gamma_n(q + gq'),\ \pi_l(q - (1 - g)\, q')\},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{10}$$

Рассмотрим уравнения движения для плотностей динамических переменных $\gamma_m(q)$ с гамильтонианом (2)

$$\dot{\gamma}_m(q) = \{\gamma_m(q), \mathscr{H}(t)\}.$$

После несложных преобразований с помощью (2) и (7) получим

$$\dot{\gamma}_m(q) = -\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k}\gamma_{nmk}(q) - \frac{\partial}{\partial q_k}\alpha_n \gamma_{mnk}(q) - \tag{11}$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_k}\int d^3q' q_k' \int_0^1 dg\, (\alpha_n(q+gq', t) - \alpha_n(q, t))\{\gamma_n(q+gq'), \gamma_m(q-(1-g)q')\}.$$

Подчеркнем, что система уравнений (11) является точной. Форма уравнений (11) особенно удобна для применения в теории возмущений по пространственным градиентам. В частности, когда внешние поля α_n слабонеоднородные и справедливо разложение

$$\alpha_n(q+gq', t) = \alpha_n(q, t) + g\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_l}q_l' + \ldots$$

последний член в (11), как нетрудно заметить, имеет более высокий порядок малости по пространственным градиентам. Тогда в линейном по градиентам приближении система (11) принимает особенно простой вид

$$\dot{\gamma}_m(q) = -\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k}\gamma_{nmk}(q) - \frac{\partial}{\partial q_k}\alpha_n \gamma_{mnk}(q). \tag{12}$$

В частном случае при $\gamma_0 = \varepsilon(q)$, $\gamma_l = \pi_l(q)$ и $\gamma_4 = \rho(q)$ для отличных от нуля плотностей «потоков» $\gamma_{mnk}(q)$, в (12) с учетом (6), (9) и (10) получим

$$\gamma_{00k}(q) = \frac{1}{2}\int d^3q' q_k' \int_0^1 dg\, \{\varepsilon(q+gq'), \varepsilon(q-(1-g)q')\},$$

$$\gamma_{l0k}(q) = -\varepsilon(q)\delta_{lk} + \int d^3q' q_k' \int_0^1 dg\, \{\varepsilon(q+gq'), \pi_l(q-(1-g)q')\}, \tag{13}$$

$$\gamma_{40k}(q) = \int d^3q' q_k' \int_0^1 dg\, \{\varepsilon(q+gq'), \rho(q-(1-g)q')\},$$

$$\gamma_{mlk}(q) = \gamma_m(q)\delta_{lk},$$

$$m = 0, 1, 2, 3, 4;\ l, k = 1, 2, 3.$$

Уравнения (12) вместе с соотношениями (13) удобны, в частности, для построения гидродинамических уравнений систем во внешних полях. В отсутствие внешних полей данный выбор γ_m приводит к обычным уравнениям гидродинамически идеальной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелетминский С. В., Соколовский А. И. «Теор. и матем. физ.», 1974, **18**, 121.
2. Красников В. А. «Теор. и матем. физ.», 1979, **39**.
3. Красников В. А. ДАН СССР, 1978, **242**, 313.
4. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. М., 1977.

Кафедра квантовой статистики

Поступила в редакцию 24.05.78

УДК 53.51

А. Е. ПУХОВ

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ПОЛЯ НА КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

1. В работах [1—4] была развита схема построения теории поля на квантованном пространстве-времени. Для этого импульсное пространство R^4 (пространство Минковского) заменялось поверхностью постоянной кривизны [1—2]

$$(\pi^0)^2-(\pi^1)^2-(\pi^2)^2-(\pi^3)^2+(\pi^4)^2=1.$$

Преобразование Лоренца действует обычным образом на координаты π^μ ($\mu=0, ..., 3$), оставляя π^4 неизменным. В качестве оператора сдвига x-пространства было предложено рассматривать оператор умножения на $\exp\left(i\sum_{\mu=0}^{3}\pi^\mu a_\mu\right)$.

Нетрудно заметить, что двум точкам кривого импульсного пространства, отличающимся лишь знаком π^4, соответствуют одинаковые значения физического четырехимпульса $p^\mu(\pi)=\pi^\mu$ ($\mu=0, 1, 2, 3$). В связи с этим возникает вопрос об интерпретации состояний с $\pi^4<0$ и о том, как они связаны с состояниями $\pi^4>0$. Мы покажем, что при $n\geqslant 2$ имеет место симметрия

$$R_n(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)=-R_n(\pi_0^*, \pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{1}$$

Здесь

$$R_n(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)=\left\langle 0\left|\frac{\delta^n}{\delta\widetilde{\varphi}(\pi_1)\ldots\delta\widetilde{\varphi}(\pi_n)}\left(\frac{\delta S}{\delta\widetilde{\varphi}(\pi_0)}S^+\right)\right|0\right\rangle$$

радиационный оператор, а π^* обозначает точку, отличающуюся от π лишь знаком π^4. Доказательство будет основано на условии микропричинности [1]

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(\xi)}\left[\frac{\delta S}{\delta\varphi(0)}S^+\right]=0 \text{ при } \xi\leqslant 0 \tag{2}$$

и трансляционной инвариантности [1—4]

$$R(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)=\exp\left(i\sum_{i=0}^{n}p(\pi_i)\,a\right)R(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{3}$$