СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелетминский С. В., Соколовский А. И. «Теор. и матем. физ.», 1974, **18**, 121.
2. Красников В. А. «Теор. и матем. физ.», 1979, **39**.
3. Красников В. А. ДАН СССР, 1978, **242**, 313.
4. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. М., 1977.

Кафедра
квантовой статистики

Поступила в редакцию
24.05.78

УДК 53.51

А. Е. ПУХОВ

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ПОЛЯ НА КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

1. В работах [1—4] была развита схема построения теории поля на квантованном пространстве-времени. Для этого импульсное пространство R^4 (пространство Минковского) заменялось поверхностью постоянной кривизны [1—2]

$$(\pi^0)^2-(\pi^1)^2-(\pi^2)^2-(\pi^3)^2+(\pi^4)^2=1.$$

Преобразование Лоренца действует обычным образом на координаты π^μ ($\mu=0, \ldots, 3$), оставляя π^4 неизменным. В качестве оператора сдвига x-пространства было предложено рассматривать оператор умножения на $\exp\left(i\sum\limits_{\mu=0}^{3}\pi^\mu a_\mu\right)$.

Нетрудно заметить, что двум точкам кривого импульсного пространства, отличающимся лишь знаком π^4, соответствуют одинаковые значения физического четырехимпульса $p^\mu(\pi)=\pi^\mu$ ($\mu=0, 1, 2, 3$). В связи с этим возникает вопрос об интерпретации состояний с $\pi^4<0$ и о том, как они связаны с состояниями $\pi^4>0$. Мы покажем, что при $n\geqslant 2$ имеет место симметрия

$$R_n(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)=-R_n(\pi_0^*, \pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{1}$$

Здесь

$$R_n(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)=\left\langle 0\left|\frac{\delta^n}{\delta\tilde{\varphi}(\pi_1)\ldots\delta\tilde{\varphi}(\pi_n)}\left(\frac{\delta S}{\delta\tilde{\varphi}(\pi_0)}S^+\right)\right|0\right\rangle$$

радиационный оператор, а π^* обозначает точку, отличающуюся от π лишь знаком π^4. Доказательство будет основано на условии микропричинности [1]

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(\xi)}\left[\frac{\delta S}{\delta\varphi(0)}S^+\right]=0 \text{ при } \xi\leqslant 0 \tag{2}$$

и трансляционной инвариантности [1—4]

$$R(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)=\exp\left(i\sum_{i=0}^{n}p(\pi_i)\,a\right)R(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{3}$$

Отметим, что любое условие микропричинности более сильное, чем (2), очевидно, также приведет к (1). В частности, соотношение (1) верно для варианта условия микропричинности, предложенного в [3].

2. Перейдем к доказательству (1). В следствие (2)

$$\int d^4\pi_1 \langle \xi | \pi_1 \rangle \int d^4\pi_0 R(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n) = 0 \text{ при } \xi \leqslant 0. \tag{4}$$

Точки кривого импульсного пространства удобно параметризовать координатами $\mathbf{p} \in R^3$ и $\omega \in [\pi, -\pi]$:

$$\pi_0 = \sqrt{1+\mathbf{p}^2}\sin\omega,\ \pi^4 = \sqrt{1+\mathbf{p}^2}\cos\omega,\ \pi^\alpha = \mathbf{p}^\alpha\ (\alpha = 1, 2, 3).$$

В этих координатах элемент инвариантного объема

$$d^4\pi = \frac{d^4p(\pi)}{|\pi^4|} = d\omega\, d^3\mathbf{p},$$

а оператор времени может быть представлен в виде (см. [1, 2]) $\xi_0 = -i\frac{\partial}{\partial\omega}$. Так как область $\xi_0 < 0$ принадлежит области $\xi \leqslant 0$, то (4) влечет за собой

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega}\, d\omega \int d^4\pi_0 R(\pi_0, \pi(\omega, \mathbf{p}), \pi_2, \ldots, \pi_n) = 0 \text{ при } n > 0. \tag{5}$$

Вследствие трансляционной инвариантности (3)

$$R(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n) = \delta^4(\Sigma p(\pi_i))\,|\pi_0^4|\,\{\theta(\pi_0^4) R'(\pi_1, \ldots, \pi_n) + \\ + \theta(-\pi_0^4) R''(\pi_1, \ldots, \pi_n)\},$$

$$\int d^4\pi_0 R(\pi_0, \ldots, \pi_n) = \theta\Big(1 - \Big(\sum_{i=1}^{n} p(\pi_i)\Big)^2\Big)\{R'(\pi_1, \ldots, \pi_n) + \\ + R''(\pi_1, \ldots, \pi_n)\} = G(\pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{6}$$

Теперь соотношение (5) может быть переписано в виде

$$\int e^{in\omega} G(\pi_1(\omega, \mathbf{p}), \pi_2, \ldots, \pi_n) = 0 \text{ при } n > 0. \tag{7}$$

3. Используя (6) и (7), мы покажем, что $G=0$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть для всех целых положительных n

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\omega)\, e^{in\omega}\, d\omega = 0,$$

где g — обобщенная функция ($g \in D'$). Тогда, если $g(\omega)$ исчезает на некотором интервале, то $g=0$ всюду.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_\psi(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega - \omega')\,\psi(\omega')\, d\omega', \text{ где } \psi \in D.$$

Вследствие гладкости g_ψ представляется абсолютно сходящимся рядом Фурье [5]:

$$g_\psi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega}, \quad |c_n| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|n|^2}.$$

Из условия леммы видно, что $c_n=0$ при $n<0$. Отсюда следует, что g_ψ является граничным значением функции $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ голоморфной в круге $|z|<1$ и непрерывной на границе этого круга. Отметим, что если носитель ψ сосредоточен на достаточно малом отрезке, то g будет равняться нулю на некотором интервале. Преобразуя изоморфно круг $|z|<1$ в полуплоскость, применяя лемму Шварца и теорему единственности, приходим к выводу, что $g_\psi=0$, если носитель ψ сосредоточен на отрезке достаточно малого размера. Отсюда следует, что $g=0$.

Применяя лемму в формуле (7), можно получить следующее утверждение: если $G(\pi_1, ..., \pi_n)$ исчезает в окрестности точки $(\pi_1, ..., \pi_n)$, а $\mathbf{p}(\pi_1)=\mathbf{p}(\pi_1')$, , то G исчезает и в окрестности точки $(\pi_1', \ldots, \pi_n')$. С помощью лоренц-инвариантности это утверждение обобщается и на тот случай, когда $\mathbf{p}(\pi_1)-\mathbf{p}(\pi_1')$ — времениподобный вектор. Но любые две точки могут быть соединены ломаной линией, составленной из времениподобных отрезков. С другой стороны, вследствие (6) G содержит в виде множителя $\theta(1-(\Sigma \mathrm{p}(\pi_i))^2$.

Таким образом, приходим к выводу, что $G=0$. Осталось заметить, что в силу (6) соотношение $G=0$ влечет за собой

$$R''(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = -R'(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n),$$

откуда и следует симметрия (1).

4. В заключение отметим, что для поверхности постоянной кривизны

$$(\pi^0)^2-(\pi^1)^2-(\pi^2)^2-(\pi^3)^2-(\pi_4)^2=-1,$$

рассмотренной в [4], можно провести все рассуждения данной заметки. При этом также придем к равенству (1).

Соотношение (1) позволяет заключить, что в рассматриваемой теории отсутствуют дополнительные степени свободы, связанные с областью $\pi^4<0$.

Автор выражает благодарность Н. Ф. Нелипе и Д. А. Славнову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадышевский В. Г. Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма. М., 1972.
2. Донков А. Д., Кадышевский В. Г., Матвеев М. Д., Мир-Касимов Р. М. «Болгарский физ. журн.», 1974, 1, 58, 150 и 233.
3. Кадышевский В. Г. Высокие энергии и элементарные частицы. В тр. V Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц. Дубна—Варшава, 1975.
4. Кадышевский В. Г. Препринт, Р2-5717. Дубна, 1971.
5. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного, ч. 3. М., 1970, с. 230.

НИИЯФ

Поступила в редакцию
06.06.78