УДК 537.311.33

А. А. ЛУКЬЯНОВ

К ТЕОРИИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СВЕРХРЕШЕТКИ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ С ГОРЯЧИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Введение. В работе [1] была поставлена и в линейном приближении решена задача о возникновении температурной сверхрешетки в полупроводниках с униполярной проводимостью в условиях достаточно большого градиента электронной (или дырочной) температуры. Предполагалось, что газ свободных носителей заряда нагревается полем световой волны в процессе внутризонного поглощения света. Электронный газ считался несжимаемым, а коэффициент поглощения γ — независящим от электронной температуры T. В настоящей работе рассматривается та же задача, что и в [1], но в условиях, когда нельзя пренебречь зависимостью коэффициента поглощения света от электронной температуры. В остальном мы пользуемся теми же предположениями, что и в [1]. В частности, будем считать, что толщина образца в направлении светового потока значительно превышает обратное значение коэффициента поглощения слабой электромагнитной волны γ_0^{-1}, а

$$\gamma_0^{-1} \gg \lambda_0^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}\varkappa_0\tau_0}.$$

Легко понять, какого эффекта здесь следует ожидать. Учет указанной зависимости при $\frac{d\gamma}{dT} > 0$ приведет к тому, что коэффициент поглощения несколько повысится у освещенной поверхности по сравнению с тем случаем, когда зависимостью $\gamma(T)$ пренебрегали. При этом увеличится (уменьшится) количество световой энергии, поглощенной у поверхности (прошедшей в глубь образца). Таким образом, здесь следует ожидать несколько больших перепадов электронной температуры. Соответственно при $\frac{d\gamma}{dT} > 0$ неустойчивость наступит при меньших значениях интенсивности света, чем ожидалось в задаче без учета зависимости $\gamma(T)$. При $\frac{d\gamma}{dT} < 0$ ситуация будет обратной.

§ 1. Основные уравнения. Исходными уравнениями для нас будут те же, что и в [1]. Отличие состоит лишь в выражении для энергии световой волны, поглощаемой единицей объема в единицу времени.

Введем следующие обозначения: n — концентрация свободных носителей заряда (в дальнейшем мы называем их электронами, хотя и пишем все формулы для частиц с положительным зарядом); $\mathbf{u}$ — скорость конвекционного движения; $\varkappa$ — температуропроводность; τ — время релаксации энергии; $\mathbf{q}$ — плотность потока энергии электронов; I — поток световой энергии; T и T_0 — электронная температура и температура решетки; $-\nabla\varphi$ — напряженность постоянного электрического поля; $\mathbf{E}_\sim$ — напряженность поля световой волны; $\mathbf{j}_\sim$ — плотность тока, обусловленного электромагнитной волной; σ — проводимость.

Если электронный газ несжимаем и невырожден, а зависимость времени релаксации импульса от энергии W степенная ($\tau_p(W) \sim W^r$), то, как известно, уравнение переноса энергии имеет вид:

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{5}{2} + r\right) n \operatorname{div}(\mathbf{u}T) - n \operatorname{div}(\varkappa \nabla T) +$$

$$+ en(\mathbf{u}, \nabla \varphi) + \frac{3}{2} n \frac{T - T_0}{\tau} = n \langle \dot{W} \rangle. \quad (1)$$

Слагаемое $n<\dot{W}>$ описывает среднюю энергию, приобретаемую единицей объема электронного газа в единицу времени от поля световой волны.

Если световая волна монохроматична, т. е.

$$\mathbf{E}_{\sim} = \operatorname{Re}[\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}], \quad \mathbf{j}_{\sim} = \operatorname{Re}[\mathbf{j}_0 e^{-i\omega t}],$$

то

$$n\langle \dot{W} \rangle = \langle \mathbf{j}_{\sim} \mathbf{E}_{\sim} \rangle = \frac{1}{2} \sigma_r (T) |E_0|^2.$$

Таким образом, чтобы получить выражение для $n<\dot{W}>$, необходимо решить уравнения Максвелла с учетом зависимости проводимости σ ($\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$) от электронной температуры. Эта зависимость считается известной из кинетической теории (см., например, [2]).

Граничные условия к уравнению (1) те же, что и в [1]. Если ось Oz совпадает с направлением светового потока, то

$$z = 0: \quad -n\varkappa \frac{\partial T}{\partial z} = -n\nu (T - T_0),$$

$$z \to \infty: \quad T \to T_0,$$

где $\nu > 0$ — феноменологический коэффициент. Сразу будем считать (в [1] это условие пришлось наложить в конце), что теплоотвод на освещенной границе мал, так что $\nu_0' = \nu_0 \varkappa_0^{-1} \lambda_0^{-1} \ll 1$. Положим

$$T = T_0 (1 + \xi)$$

и будем считать, что перегрев мал, т. е. $\xi \ll 1$. Поэтому в дальнейшем по ξ везде будет производиться линеаризация. Учитывая сказанное, ограничимся в разложении $\sigma(\xi)$ в ряд Тэйлора членами не выше первого порядка по ξ, т. е.

$$\sigma(\xi) = \sigma_0 + \sigma_0 \dot{\sigma}_0 \xi,$$

где через $\dot{\sigma}_0$ обозначена логарифмическая производная $\dot{\sigma}_0 = \left(\frac{d \ln \sigma}{d \ln T}\right)_{T=T_0}$.

§ 2. Статический случай. В условиях, когда неустойчивость еще не наступила, решение следует искать в виде

$$\mathbf{u} = 0, \quad \xi = \xi_s(z), \quad \varphi = \varphi_s(z), \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{s0}(z) \| Ox.$$

При этом уравнение (1) принимает вид

$$-nT_0 \xi_s'' - nT_0 \frac{(\xi_s')^2}{1 + \xi_s} \dot{\varkappa} + \frac{3}{2} nT_0 \frac{\xi_s}{\tau} = \frac{1}{2} \sigma_r (\xi_s) |E_{s0}|^2. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений Максвелла и (2) дает [2]

$$E_{s0}(z) = E_m e^{i q \bar{n}_0 z - \gamma_0 z/2} \exp\left\{ i \frac{q}{2} \frac{\frac{d\varepsilon(0)}{d\xi}}{\varepsilon(0)} \int_0^z \xi_s dz' - \frac{1}{4} \frac{\frac{d\varepsilon(0)}{d\xi}}{\varepsilon(0)} [\xi_s(z) - \xi_s(0)] \right\}$$

и (в линейном по ξ_s приближении)

$$\xi_s(z) = \frac{\sigma_{r0} |E_m|^2}{3nT_0\tau_0^{-1}} [e^{-\nu_0 z} - (\nu_0' + \gamma_0 \lambda_0^{-1}) e^{-\lambda_0 z}].$$

Здесь

$$\bar{n}_0 + i\gamma_0/2q = \sqrt{\varepsilon(\omega, 0)},\ q = \omega/c,\ \varepsilon(\omega, \xi) = \varepsilon_l(\omega) + i4\pi\sigma(\omega, \xi)/\omega.$$

Через $\varepsilon_l(\omega)$ обозначена часть диэлектрической проницаемости, обусловленная поляризацией атомов и колебаниями ионов решетки и не зависящая от электронной температуры. $E_m = E_{s0}(0)$. Значение E_m определяется из условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля на границе $z=0$.

§ 3. Температурная сверхрешетка. Для исследования устойчивости статического состояния относительно возникновения сверхрешетки наложим на статическое решение малое возмущение, полагая

$$\xi = \xi_s + \delta\xi,\ \varphi = \varphi_s + \delta\varphi,\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \delta\mathbf{u}\ (\mathbf{u}_s = 0),$$

$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{s0} + \delta\mathbf{A}_0$ ($\mathbf{A}_\sim = \mathrm{Re}\,[\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}]$ — какой-либо из векторов $\mathbf{E}_\sim$, $\mathbf{H}_\sim$, $\mathbf{D}_\sim$, $\mathbf{j}_\sim$), причем

$$\delta\xi,\ \delta\varphi,\ \delta u \backsim e^{st} \cos \mathbf{kr},$$

а коэффициенты пропорциональности суть соответственно $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\mathbf{f}(z)$; через $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ обозначены двумерные (в плоскости x, y) векторы; s — величина размерности обратного времени. В каком виде следует искать $\delta\mathbf{E}_0$, $\delta\mathbf{H}_0$, $\delta\mathbf{D}_0$ и $\delta\mathbf{j}_0$, будет ясно из дальнейшего. Момент наступления неустойчивости определяется условием $\mathrm{Re}\,s=0$. Так как нас интересует вопрос о возникновении стационарной конвекции, положим и $\mathrm{Im}\,s=0$.

Векторы $\delta\mathbf{j}_0$, $\delta\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}_{s0}$ связаны соотношением

$$\delta\mathbf{j}_0 = \sigma_s \delta\mathbf{E}_0 + \sigma_s \dot{\sigma}_s \delta\xi \mathbf{E}_{s0}, \tag{3}$$

которое получается варьированием формулы $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}_0$ около статического решения.

Чтобы найти $\delta\mathbf{E}_0$, надо решить уравнения Максвелла. Варьируя последние около статического решения, получаем

$$\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{H}_\sim = \frac{4\pi}{c}\delta\mathbf{j}_\sim + \frac{\varepsilon_l}{c}\frac{\partial \delta E_\sim}{\partial t}; \tag{4}$$

$$\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{E}_\sim = -\frac{1}{c}\frac{\partial \delta H_\sim}{\partial t}; \tag{5}$$

$$\mathrm{div}\,\delta\mathbf{H}_\sim = \mathrm{div}\,\delta\mathbf{E}_\sim = 0. \tag{6}$$

При этом учтено, что в условиях $\omega\tau_{ee} \gg 1$ электронная температура ξ, а с ней и концентрация свободных носителей заряда n и объемная плотность заряда $\rho^{\text{своб}}$ не зависят от времени.

Согласно (3) и (6) $\delta\mathbf{E}_0$ следует искать в виде

$$\delta E_{0x},\ \delta E_{0y} \backsim \cos \mathbf{kr},\ \delta E_{0z} \backsim \sin \mathbf{kr};$$

коэффициенты пропорциональности соответственно равны $\mathscr{E}_{0x}(z)$, $\mathscr{E}_{0y}(z)$ и $\mathscr{E}_{0z}(z)$. При этом уравнения (4), (5) и (6) дают

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \mathscr{K}_s^2\right) \mathscr{E}_0 = \Psi_s, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{K}_s^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon_l + i\frac{4\pi\sigma_s}{\omega} - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right], \quad \mathbf{\Psi}_s = \left\{\Psi_s = -i\frac{4\pi\omega}{c^2}\sigma_s\dot{\sigma}_s f_1 E_{s0},\ 0,\ 0\right\}.$$

Граничное условие к уравнению (7) при $z \to \infty$ имеет вид

$$\mathcal{E}_0|_{z\to\infty} \to 0.$$

Значения констант $\mathcal{E}_{m\alpha} = \mathcal{E}_{0\alpha}|_{z=0}$ $(\alpha = x, y, z)$ определяются из граничных условий к уравнениям Максвелла при $z=0$. Эти условия получаются, если проварьировать около статического решения (при постоянных $\underset{\sim}{\mathbf{E}}^{\text{пад}}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{H}}^{\text{пад}}$) обычные граничные условия электродинамики. Мы имеем

$$\delta E_{m\alpha}^{\text{отр}} = \delta E_{m\alpha} \quad (\alpha = x, y); \tag{8}$$

$$\varepsilon_d \delta E_{mz}^{\text{отр}} = \varepsilon_l \delta E_{mz}; \tag{9}$$

$$\delta H_{m\beta}^{\text{отр}} = \delta H_{m\beta} \quad (\beta = x, y, z). \tag{10}$$

Здесь ε_d — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, граничащего с полупроводником.

Необходимая для решения системы (8)—(10) связь между векторами $\delta\mathbf{E}_m$ и $\delta\mathbf{H}_m$ определяется, как обычно, из уравнений (5) и (7). Уравнение (7) решается по теории возмущений. Представим $\mathcal{E}_0$ в виде

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{E}}_0^{(1)} + \vec{\mathcal{E}}_0^{(2)}, \text{ где } |\mathcal{E}_0^{(2)}| / |\mathcal{E}_0^{(1)}| \sim \xi_s \ll 1.$$

Тогда для $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}$ имеем следующую краевую задачу:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \mathcal{K}_0^2\right)\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)} = \mathbf{\Psi}_0;$$

$$\mathcal{E}_{0\alpha}^{(1)}|_{z=0} = \mathcal{E}_{m\alpha}^{(1)} \quad (\alpha = x, y, z);$$

$$\mathcal{E}_{0\alpha}^{(1)}|_{z\to\infty} \to 0,$$

где $\mathcal{K}_0^2 = \mathcal{K}_s^2\ (\xi_s = 0)$.

Величины $\vec{\mathcal{E}}_{0\alpha}^{(2)}$ мы искать не будем, поэтому индекс 1 в дальнейшем будем опускать. Решение поставленной выше краевой задачи имеет вид

$$\mathcal{E}_{0x} = \mathcal{E}_{mx}e^{i\mathcal{K}_0 z} + \frac{ie^{i\mathcal{K}_0 z}}{2\mathcal{K}_0}\left[\int_0^\infty dz' e^{i\mathcal{K}_0 z'}\Psi_0(z') - \right.$$

$$\left. - \int_0^z dz' e^{-i\mathcal{K}_0 z'}\Psi_0(z') - e^{-i2\mathcal{K}_0 z}\int_z^\infty dz' e^{i\mathcal{K}_0 z'}\Psi_0(z')\right];$$

$$\mathcal{E}_{0\alpha} = \mathcal{E}_{m\alpha}e^{i\mathcal{K}_0 z} \quad (\alpha = y, z).$$

При этом из уравнения (5) находим при $z = 0$

$$(k_y\mathcal{E}_{mz} - \mathcal{K}_0\mathcal{E}_{my})\cos \mathbf{kr} = q\delta H_{mx}; \tag{11}$$

$$\left(\mathscr{K}_0\mathscr{E}_{mx}-\int\limits_0^\infty dz' e^{i\mathscr{K}_0 z'}\Psi_0(z')-k_x\mathscr{E}_{mz}\right)\cos\mathbf{kr}=q\delta H_{my};\tag{12}$$

$$-(k_x\mathscr{E}_{my}-k_y\mathscr{E}_{mx})\sin\mathbf{kr}=q\delta H_{mz}.\tag{13}$$

Оценка интеграла в формуле (12) показывает, что он мал по параметру $\gamma_0/\lambda_0\ll 1$, поэтому его следует опустить. В силу уравнения (6) величины $\mathscr{E}_{mx}$, $\mathscr{E}_{my}$ и $\mathscr{E}_{mz}$ не независимы, а связаны соотношением

$$-k_x\mathscr{E}_{mx}-k_y\mathscr{E}_{my}+\mathscr{K}_0\mathscr{E}_{mz}=0.\tag{14}$$

Чтобы написать выражения типа (11)—(14) для отраженной волны, нужно во всех формулах положить $\sigma=0$ и произвести замену ε_l на ε_d и $\mathscr{K}_0$ на $-Q_0=-\omega c^{-1}(\varepsilon_d-k^2c^2\omega^{-2})^{1/2}$.

Легко убедиться при этом, что все необходимые условия удовлетворяются, лишь если

$$\mathscr{E}_{m\alpha}=\mathscr{E}_{m\alpha}^{\text{отр}}=\delta H_{m\alpha}=\delta H_{m\alpha}^{\text{отр}}=0\quad(\alpha=x,y,z).$$

Этот результат не должен вызывать удивления: как и в обычной линейной оптике, граничным условиям нельзя удовлетворить, рассматривая только две волны.

Уравнение баланса энергии удобно решать в безразмерных переменных. Будем считать, что длина измерена в единицах λ_0^{-1}, время — в единицах τ_0, скорость — в $u_0=3/(5+2r)\lambda_0\tau_0$, электрическое поле — в $3T_0/2e\tau_0 u_0$, интенсивность света — в $3nT_0/2\lambda_0\tau_0$. Тогда варьируя уравнение (1) около статического решения, линеаризуя его по ξ и отбрасывая слагаемые, малые по параметрам γ_0 и γ_0^2, получаем

$$f_1''-[k^2+1-(2\dot{\tau}_0+\dot{\varkappa}_0)\,\xi_s]\,f_1=-\dot{\sigma}_{r0}\gamma_0 I_m e^{-\gamma_0 z}f_1-$$
$$-\gamma_0 I_m e^{-\gamma_0 z}(\mathscr{E}_{0x}/E_{s0}+\text{К. С.})\,.\tag{15}$$

При $\dot{\sigma}_{r0}=0$ уравнение (15) переходит в соответствующее уравнение работы [1]. Уравнение (15) мы будем решать в двух областях: $z\ll\gamma_0^{-1}$ (при этом $\xi_s\simeq\gamma_0 I_m$) и $z\gg\gamma_0^{-1}$ (здесь $\xi_s\simeq\gamma_0 I_m e^{-\gamma_0 z}$). Оценка правой части уравнения (при этом в качестве f_1 берется его нулевое приближение — функция, найденная в [1]) показывает, что она мала, и мы ее отбросим. В области $z\ll\gamma_0^{-1}$ получаем

$$f_1(z)=A\cos\lambda z+B\sin\lambda z,\tag{16}$$

где

$$\lambda^2=(2\dot{\tau}_0+\dot{\varkappa}_0+\dot{\sigma}_{r0})\gamma_0 I_m-k^2-1=q_0^2-k^2-1.$$

В области же $z\gg\gamma_0^{-1}$ (с учетом условия $T\to T_0$ при $z\to\infty$) находим

$$f_1(z)=CJ_p\left(\frac{2q_0}{\gamma_0}e^{-\gamma_0 z/2}\right),\tag{17}$$

где $p=2\gamma_0^{-1}(1+k^2)^{1/2}$.

Волновой вектор сверхрешетки k, а с ним и критическую интенсивность $I_m^{\text{кр}}$ найдем из граничного условия к уравнению (15) при $z=0$ и условия сшивания решений (16) и (17) в некоторой точке $z_0\leqslant\gamma_0^{-1}$. Оказывается, что получающиеся при этом значения k и $I_m^{\text{кр}}$ не зависят от точки сшивания z_0*.

* Мое внимание на это обратил В. Л. Бонч-Бруевич.

Первое из указанных условий имеет вид:

$$z = 0: \quad f_1' = \nu'_{\text{эфф}} f_1,$$

где

$$\nu'_{\text{эфф}} = \nu'_0 \left[1 - (2\dot{\nu}'_0 + \dot{\varkappa}_0)\, \gamma_0 I_m\right] (1 - \dot{\varkappa}_0 \gamma_0 I_m)^{-1}. \tag{18}$$

Из формул (16)—(18) и условия сшивания решений в точке z_0 с точностью до величин $\sim \gamma_0^2$ получаем $\gamma_0 I_m (2\dot{\tau}_0 + \dot{\varkappa}_0 + \dot{\sigma}_{r0}) = 1 + k^2$ и, следовательно,

$$k = \sqrt{\frac{I_m}{I_m^{\text{кр}}} - 1},$$

где

$$I_m^{\text{кр}} = \frac{1}{\gamma_0 (2\dot{\tau}_0 + \dot{\varkappa}_0 + \dot{\sigma}_{r0})} \tag{19}$$

есть минимальное значение интенсивности, при котором наступает неустойчивость.

Феноменологически учет зависимости коэффициента поглощения света от электронной температуры проявляется в том, что становится несправедливой формула $I = I_m e^{-\gamma z}$, использованная в работе [1]. Для установления истинной зависимости пришлось решать уравнения Максвелла. Оказывается, что если вместо этого просто положить $I = I_m \exp\left\{-\int\limits_0^z \gamma(z')\, dz'\right\}$ (что непосредственно следует из определения коэффициента поглощения), то получится тот же результат с той лишь разницей, что в формуле (19) вместо $\dot{\sigma}_{r0}$ будет стоять $\dot{\gamma}_0$. Однако такой подход представляется менее убедительным, чем решение уравнений электродинамики, поскольку в нем отсутствует рецепт вычисления функции $\gamma(T)$, а с ней и величин γ_0 и $\dot{\gamma}_0$.

Из формулы (19) видно, что при $\dot{\sigma}_{r0} = 0$, т. е. в отсутствие зависимости коэффициента поглощения от электронной температуры она переходит в соответствующую формулу работы [1]. При $\dot{\sigma}_{r0} > 0$, как и ожидалось, мы получим несколько меньшие значения $I_m^{\text{кр}}$, чем в [1], а при $\dot{\sigma}_{r0} < 0$ — несколько бо́льшие. Если в полупроводнике импульс электронов рассеивается в основном на заряженной примеси, а энергия — на пьезоэлектрических акустических фононах, то $\gamma_0 I_m^{\text{кр}}$ будет равно 1/5, а не 1/3,5 (как было бы при $\dot{\sigma}_{r0} = 0$).

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность В. Л. Бонч-Бруевичу за предоставление интересной темы, внимание и большую помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонч-Бруевич В. Л. ЖЭТФ, 1974, **67**, 2204.
2. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М., 1975.

Поступила в редакцию
04.04.78