9. Альтшулер Ю. Г., Тараненко А. С. Лампы малой мощности с обратной волной. М., 1963.
10. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М., 1963.
11. Леонтьев В. В., Пирогов Ю. А. Всесоюзный симпозиум по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. Тезисы докладов. М., 1976, с. 174.
12. Русин Ф. С., Синенко Л. А., Костромин В. П. Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 8, 1670.

Поступила в редакцию
14.03.78

УДК 531.5:621.398.694.3.011.4

Ю. И. ВОРОНЦОВ, Ф. Я. ХАЛИЛИ

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ ЕМКОСТНОГО ДАТЧИКА В ДЕТЕКТОРАХ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

При расчете чувствительности детектора гравитационных волн обычно ограничиваются анализом только части схемы: антенны и преобразователя [1, 2]. Чувствительность определяется по отношению сигнал/шум в преобразователе. При этом предполагаются реально осуществимыми различные математические операции выделения сигнала из шума. Такая постановка задачи допустима в идеализированном классическом приближении, когда можно считать абсолютно не шумящими устройства, на которые передается сигнал с преобразователя. Получаемые таким путем рекомендации для повышения чувствительности во многом теряют свою практическую ценность, так как они предполагают использование после преобразователя устройств с нереально низкой шумовой температурой. Практически более ценным, а в квантовом приближении необходимым является прослеживание сигнала до той части схемы, где его энергия становится много больше энергии флуктуаций в последующих каскадах. Из приведенных в [1, 3] расчетов следует, что если считать шумовую температуру следующих за преобразователем каскадов равной температуре преобразователя, то минимальное обнаружимое изменение амплитуды колебаний антенны будет равно

$$\Delta x_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{\varkappa T_{\text{эф}}}{\omega_e \omega_м m}}, \tag{1}$$

где

$$\varkappa T_{\text{эф}} = \frac{\hbar\omega_e}{2} + \hbar\omega_e/(\exp(\hbar\omega_e/\varkappa T) - 1),$$

ω_e — частота сигнала в преобразователе, $\hbar$ — постоянная Планка, $\omega_м$, m — собственная частота и эффективная масса антенны, T — температура преобразователя, $\varkappa$ — постоянная Больцмана. В (1) учитываются только ошибки измерения, влияния броуновского движения антенны считается малым. В существенно квантовом случае $(T \to 0)$

$$\Delta x_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_м}}, \tag{2}$$

что соответствует неопределенности амплитуды колебаний антенны в когерентном состоянии и неопределенности энергии колебаний

$$\Delta\mathscr{E} = \sqrt{n}\,\hbar\omega_м \quad \text{при} \quad n \gg 1$$

(n — среднее число квантов).

Анализ обычной процедуры измерения [1] с позиций квантовой теории измерений показал, что предельные значения (1) и (2) чувствительности являются следствием неоптимальности режима измерения [4]. Поскольку гамильтониан взаимодействия используемых преобразователей с антенной пропорционален ее координате, то можно в принципе сколь угодно точно (до релятивистских ограничений) измерять значение координаты в определенные моменты времени. Однако при непрерывном режиме измерения точность определения текущего значения координаты будет ограничена соотношением (1). Дело в том, что измерение координаты сопровождается возмущением импульса, которое приводит к росту неопределенности координаты в последующие моменты времени.

Для повышения чувствительности можно использовать следующее важное свойство осциллятора: среднее по ансамблю значение координаты и ее неопределенность при отсутствии возмущения повторяются с периодом $2\pi/\omega_М$. Внешняя сила $F\cos(\omega_М t+\varphi)$ меняет ожидаемое значение координаты в моменты $t_k = 2\pi k/\omega_М$ на величину $\delta x_F = \dfrac{F\tau}{2m\,\omega_м}\sin\varphi$ (τ — продолжительность действия силы). Действие силы может быть обнаружено, если δx_F превысит ошибку измерения мгновенной координаты.

Определим ошибку измерения координаты в схеме с емкостным датчиком при импульсном включении накачки. Будем анализировать несколько отличающийся от известных емкостный преобразователь, в котором исключается воздействие на антенну регулярной составляющей пондеромоторной силы (рис. 1). В принципе использование балансной схемы не является обязательным, но ее анализ несколько проще и нагляднее.

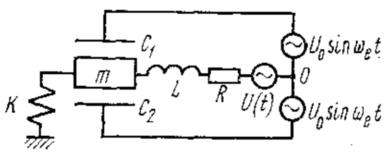

Рис. 1

Генератор накачки создает симметричное относительно точки O напряжение, представленное на схеме генераторами $U_0 \sin\omega_e t$. Когда емкости C_1 и C_2, образуемые неподвижными пластинами и подвижной массой m, одинаковы, напряжение в диагонали моста равно нулю. При перемещении массы на расстояние x возникает разность потенциалов в диагонали моста, равная $U_0(x/d)\sin\omega_e t$ (d — величина зазора в емкостях при балансе). Площади пластин считаются одинаковыми. (Гравитационная антенна здесь представлена в виде осциллятора с сосредоточенной массой m и жесткостью $K_М$.)

При отсутствии тока в диагонали моста результирующая пондеромоторная сила равна нулю при любых x даже при наличии флуктуаций напряжения в цепи питания, поскольку заряды на C_1 и C_2 в этом случае одинаковы. Только при утечке заряда через диагональ вследствие флуктуационной э.д.с. в диагонали $U(t)$ или разбаланса моста возникает сила, возмущающая движение массы.

Поскольку получаемый сигнал узкополосный, то для увеличения сигнала на входе усилителя можно использовать резонанс, включив последовательно с усилителем индуктивность L. Соответствующая эквивалентная схема, определяющая сигнал на входе усилителя, изображена на рис. 2. Сопротивление R определяется отбором мощности в усилитель (рассеянием энергии внутри контура пренебрегаем). Емкость контура $C=C_1+C_2$ остается постоянной с относительной точностью $(x/d)^2$. Спектральная плотность флуктуационной э.д.с. определяется шумовой температурой усилителя. Флуктуациями напряжения в плечах моста можно пренебречь по следующим причинам: как сигнал в усилителе, так и возмущающая движение массы пондеромоторная сила пропорциональны суммарному напряжению накачки, а флуктуации этого напряжения относительно малы. Трением в механической системе пренебрегаем, считая время релаксации антенны настолько большим, что чувствительность детектора ограничивается только ошибкой измерения. Уравнения движения системы при импульсном включении накачки будут следующими:

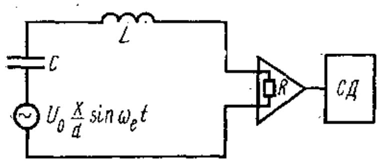

Рис. 2

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_e^2 q = C\omega_e^2 xE\,\Phi(t) \sin \omega_e t + C\omega_e^2 U(t); \tag{3}$$

$$\ddot{x} + \omega_м^2 x = \frac{qE}{m} \Phi(t) \sin \omega_e t.$$

Здесь $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ — ток в диагонали моста;

$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC}; \quad E = \frac{U_0}{d};$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } \frac{2\pi k}{\omega_м} < t < \frac{2\pi k}{\omega_м} + t_и, \ k \text{ — целое,} \\ 0 \text{ при других значениях } t; \end{cases} \tag{4}$$

$t_и$ — продолжительность каждого измерения.

Уравнения (3) являются линейными. Поэтому квантовые уравнения для операторов $\hat{q}$ и $\hat{x}$ будут иметь тот же вид. В дальнейшем $q(t)$ и $x(t)$ будем считать операторами соответствующих величин. Рассмотрение задачи в рамках квантовой механики позволит автоматически решить вопрос о пределах применимости решений. Будем искать решение $q(t)$ в виде:

$$q(t) = a(t) \cos \omega_e t + b(t) \sin \omega_e t. \tag{5}$$

Если $\omega_e t_и \gg 1$, то для решения уравнений (3) можно использовать метод медленно меняющихся амплитуд. Если $\omega_м t_и \ll 1$, $\delta t_и \gg 1$, то в интервале $0 \leqslant t \leqslant t_и$ решение (3) будет иметь вид:

$$a(t) = ae^{-\delta t} - C\omega_e e^{-\delta t} \int_0^t U(t') \sin \omega_e t'\, dt' -$$

$$- \frac{1}{2} CE\omega_e e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta t'} x_0(t') \Phi(t')\, dt' - \left(\frac{CE^2 \omega_e b e^{-\delta t}}{4m} \right) g(t, 0) -$$

$$- \left(\frac{C^2E^2 \omega_e^2 e^{-\delta t}}{4m} \right) \int_0^t g(t, t') e^{\delta t'} U(t') \cos \omega_e t'\, dt'; \tag{6}$$

$$b(t) = be^{-\delta t} + C\,\omega_e e^{-\delta t}\int\limits_0^t e^{\delta t'}\,U(t')\cos\omega_e t'\,dt', \qquad (7)$$

где

$$f(t, t') = \frac{1}{\omega_м}\int\limits_{t'}^{t} e^{-\delta t''}\sin\omega_м (t - t'')\,\Phi(t'')\,dt'';$$

$$g(t, t') = \int\limits_{t'}^{t} e^{\delta t''}\,\Phi(t'')\,f(t'', t')\,dt',$$

$$x_0(t) = x\cos\omega_м t + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_м}\right)\sin\omega_м t. \qquad (8)$$

Через a, b, x, $\dot{x}$ без символов явной зависимости от времени обозначены неподвижные (шредингеровские) операторы (в классическом случае — начальные значения).

Если после линейного усилителя применить синхронное детектирование (*СД* на рис. 2), чтобы отфильтровать не содержащую информации о x компоненту $b(t)\sin\omega_e t$, то приведенный ко входу усилителя интеграл от полного сигнала будет равен

$$S = \int\limits_0^{t_u}[R\dot{q}(t') + U(t')]\cos\omega_e t'\,dt' = -\frac{1}{2}Et_u x_0\left(\frac{t_u}{2}\right) + \int\limits_0^{t_u} U(t')\,(\cos\omega_e t' - \sin\omega_e t')\,dt' + \frac{a}{\omega_e C} - \frac{bE^2 t_u^2}{8m\delta} - \frac{EC\omega_e}{8m\delta}\int\limits_0^{t_u}(t')^2\,U(t - t')\cos\omega_e(t - t')\,dt'. \qquad (9)$$

Здесь, строго говоря, предполагается, что весь шум усилителя связан с шумом во входной цепи. В общем случае $u(t)$ будет лишь частью приведенной ко входу шумовой э.д.с. Поскольку в дальнейшем корреляция $u(t)$ с шумовой э.д.с. на выходе усилителя не используется, то принятое предположение не может привести к заниженной ошибке измерения.

После выключения накачки движение механического осциллятора будет являться суперпозицией свободных колебаний и колебаний, вызванных внешней гравитационной силой.

В момент времени $t_1 = t_и/2 + 2\pi k/\omega_м$

$$x(t_1) = x_0\left(\frac{t_u}{2}\right) + \frac{bEt_u}{4m\delta} + \frac{CE\omega_e t_u}{4m\delta}\int\limits_0^{t_u} U(t')\cos\omega_e t'\,dt' + \delta x_F. \qquad (10)$$

Значение $x(t_1)$ в (10) взято в момент времени, соответствующий середине импульса накачки, потому что этим значением определяется величина сигнала (см. (9)). В результате второго включения накачки получим сигнал S_1, определяемый соотношением (9), если в нем заменить $x_0(t_и/2)$ на $x(t_1)$, a и b на a_1, b_1. Разность сигналов S_1 и S будет равна

$$S_1 - S = \frac{CE^2\omega_e t_u^2}{8m\delta}\int_0^{t_u} U(t')\cos\omega_e t'\,dt' + \int_0^{t_u}[U_1(t') - U(t')]\times$$

$$\times(\cos\omega_e t' - \sin\omega_e t')\,dt' + \frac{a_1 - a}{\omega_e C} - \frac{b_1 - b}{8m\,\delta}E^2 t_u^2 -$$

$$-\frac{CE^2\omega_e}{8m\,\delta}\int_0^{t_u}(t')^2[U_1(t - t') - U(t - t')]\cos\omega_e(t - t')\,dt' - \frac{1}{2}Et_u\,\delta x_F. \tag{11}$$

Здесь $U_1(t) = U(t + 2\pi k/\omega_м)$.

Действие гравитационной волны можно считать обнаружимым, если связанное с δx_F изменение сигнала превышает стандартное отклонение $\sqrt{\langle[\Delta(S_1 - S)]^2\rangle}$:

$$\delta x_F \geqslant \left[\varkappa T_{эф}\left(\frac{8\delta}{CE^2\omega_e^2 t_u} + \frac{7}{160}\frac{CE^2 t_u^3}{m^2\delta}\right)\right]^{1/2}. \tag{12}$$

При расчете (12) использовалось выражение корреляционной функции шумов $U(t)$, которое можно получить, пользуясь методом [5]:

$$\langle\{U(t')U(t'')\}\rangle = 2\varkappa T_{эф}R\,\delta(t' - t''), \tag{13}$$

где $\delta(t' - t'')$ — дельта-функция,

$$\{U(t')U(t'')\} = \left(\frac{1}{2}\right)[U(t')U(t'') + U(t'')U(t')]. \tag{14}$$

Учитывалось также, что

$$\begin{aligned}&\langle a\rangle = \langle b\rangle = \langle a_1\rangle = \langle b_1\rangle = 0;\\ &\langle a^2\rangle = \langle b^2\rangle = \langle b_1^2\rangle = \langle a_1^2\rangle = C\varkappa T_{эф}.\end{aligned} \tag{15}$$

Оптимизируя (12) по E, получим

$$\delta x_F \geqslant \sqrt{\frac{\varkappa T_{эф}}{\omega_e\omega_м m}\,\omega_м t_и}\,, \tag{16}$$

при

$$E_{опт}^2 = \frac{6m}{CQ_e t_и^2}, \quad Q_e = \omega_e/2\delta. \tag{17}$$

При непрерывно действующей накачке минимальное обнаружимое изменение амплитуды колебаний определяется соотношением (1).

Так как $\omega_м t_и \ll 1$, то при одних и тех же значениях ω_e, m, $T_{эф}$ величина (16) много меньше (1). Соотношение (16) справедливо и при $\delta x_F < \sqrt{\hbar/2m\omega_м}$. При уменьшении $t_и$ растет $E_{опт}$. Практически E должно быть существенно меньше напряженности пробоя. Если напряжение пробоя не позволяет получить заданную точность при однократном измерении, то следует проводить измерения при $E < E_{опт}$, но многократно, через целое число периодов колебаний.

Соответствующая (16) чувствительность может быть достигнута за $N=(E_{опт}/E)^2$ последовательных измерений.

Авторы благодарят профессора В. Б. Брагинского за продуктивное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1970.
2. Гусев А. В., Руденко В. Н. Радиотехника и электроника, 1976, № 9, 1972.
3. Гордиенко Н. В., Гусев А. В., Руденко В. Н. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ., астроном., 1977, № 2, 50.
4. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. Письма в ЖЭТФ, 1978, 27, 296.
5. Senitsky I. R. Phys. Rev., 1960, 119, N 2, 670.

Поступила в редакцию
30.03.78

УДК 535.551

Ю. Д. ГОЛЯЕВ, К. Н. ЕВТЮХОВ, Л. Н. КАПЦОВ

НАВЕДЕННАЯ АНИЗОТРОПИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ИЗ ГРАНАТА С НЕОДИМОМ

Как известно [1, 2], в активных элементах (АЭ) квантовых генераторов и усилителей на гранате с неодимом при выделении части энергии накачки в виде тепла и охлаждении боковой поверхности АЭ потоком жидкости возникает поле термических напряжений. Эти напряжения обусловливают анизотропию показателя преломления и неоднородное двулучепреломление по сечению АЭ. Наиболее часто используются цилиндрические АЭ, длина которых много больше поперечных размеров. В таких АЭ влияние условий закрепления концов на распределение напряжений мало [2]. Кроме того, условия охлаждения АЭ обычно одинаковы на всей боковой поверхности. Поэтому можно считать, что наведенное двулучепреломление зависит только от поперечных координат и не меняется по длине АЭ.

Ряд исследований [3—6] показал, что неоднородное по сечению двулучепреломление во многом определяет параметры генерируемого или усиливаемого в АЭ излучения. Поэтому точное решение задачи о распределении двулучепреломления по сечению имеет большое практическое значение для оптимизации параметров генераторов и усилителей света.

Для АЭ, имеющих форму цилиндрических стержней, распределение термически наведенного двулучепреломления зависит от ориентации оси цилиндра относительно осей кубической решетки кристалла граната. В работах [1, 2, 7] исследовались стержни с осью, совпадающей с кристаллографическим направлением $<111>$. Для такой ориентации наведенное двулучепреломление зависит от расстояния до оси цилиндра и не зависит от угловых координат. В то же время широко используются АЭ с кристаллографической ориентацией $<001>$. Как показано теоретически в работе [8], в этом случае имеется зависимость наведенного двулучепреломления как от радиальной, так и от угловой координаты. Экспериментально этот вопрос изучен